Volumforståelse hos elever på grunnkurs i videregående skole

Hovedoppgave i realfagdidaktikk

av

Eli Vestersjø

Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling

Universitetet i Oslo

Oktober 2002

Forord

Etter et års permisjon fra skolen med pendling og eksamener i hovedfagskurs på ILS, gikk jeg løs på en hovedfagsoppgave under veiledning av Gunnar Gjone.
Det har vært et lærerikt arbeid, og jeg har fått innsikt i litteratur innen matematikkdidaktikk som jeg ellers ikke hadde fått.
Jeg takker Gunnar Gjone for veiledning.
Jeg vil spesielt takke Egil, min tålmodige mann, for oppmuntring og støtte, både praktisk og mentalt, gjennom denne tiden.

Stavanger, oktober 2002

Eli Vestersjø

Innhold

Kapittel 1 Innledning 7
1.1 Bakgrunn for valg av problemstilling 7
1.2 Mål for oppgaven 8
1.3 Organisering av oppgaven 9
1.4 Et kort tilbakeblikk over matematikkopplæringen 9
1.5 Oppsummering 11
Kapittel 2 Filosofi og epistemologi 13
2.1 Innledning 13
2.2 Om læring 13
2.2.1 Læring – litt historikk 14
2.2.2 Om læring i matematikk 15
2.2.3 Måling og enheter 18
2.2.4 Volumforståelse 19
2.2.5 Problemløsing i matematikkopplæringen 19
2.2.5.1 Kunnskapsgrunnlaget 22
2.2.5.2 Problemløsingsstrategier 22
2.2.5.3 Metalæring 22
2.2.5.4 Tro og følelser 23
2.2.5.5 Praksis 24
2.3 Oppsummering 24
Kapittel 3 En analyse av Mønsterplan av 1987 27
3.1 Innledning 27
3.1.1 Hvorfor læreplaner? 27
3.2 Læreplanutviklingen i Norge siden 1939 28
3.2.1 Mønsterplanen av 1987 29
3.3 Kriterier for valg av stoff 29
3.3.1 Stoffutvalget i M 87 i matematikk 30
3.3.1.1 Måling og enheter 31
3.3.1.2 Volum 31
3.3.1.3 Problemløsing 32
3.4 Veiledningsheftet – en hjelp for læreren 32
3.4.1 Måling og enheter - volum 32
3.4.2 Problemløsing 32
3.5 Oppsummering 34
Kapittel 4 Analyse av et læreverk – Analyse av Avgangsprøver i grunnskolen 37
4.1 Innledning 37
4.2 Måling og enheter i læreverket – volum 37
4.3 Problemløsing i læreverket 38
4.4 Oppsummering 41
4.5 Avgangsprøve i grunnskolen fra 1987 til 1999 43
4.5.1 Innledning 43
4.5.2 Avgangsprøven i 1987 og 1988 43
4.5.3 Avgangsprøve i grunnskolen fra 1989 til 1999 44
4.6 Oppsummering 45

Kapittel 5 Diagnostiske oppgaver i måling og enheter 47
5.1 Innledning 47
5.2 Alternative begreper 47
5.3 Utarbeidelse av oppgaver 48
5.4 Validitet 48
5.5 Reliabilitet 49
5.6 Koding 49
5.6.1 Reliabilitet av koding 50
5.7 Metode og resultater 51
5.7.1 Innledning 51
5.7.2 Prosedyre 52
5.7.3 Presentasjon av data 53
5.8 Oppgaver som måler volumforståelse 54
5.8.1 Volumbegrepet 54
5.8.1.1 Hvor mange av terningene til venstre får plass i den store esken? 54
5.8.1.2 Sigrids kloss 56
5.8.2 Volum – overflate 58
5.8.2.1 Sigrids kloss 58
5.8.2.2 Beregning av overflate 58
5.8.3 Volumbegrepet – størrelser 59
5.8.3.1 Vil det være plass til 4 personer i en kasse med volum 1 m^3 ? 59
5.8.3.2 Volumet av kroppen til en voksen mann 60
5.8.3.3 En kasse på 0,5 m^3 – hvordan ser den ut? 61
5.8.4 Volumbegrepet – dimensjoner 62
5.8.4.1 Hvor mange terninger med side 0,5 cm får plass i den store esken? 62
5.8.4.2 Måleglasset 62
5.9 Oppgaver som måler volumforståelse – oppsummering 63
5.10 Resultater i forhold til studieretninger 64
5.11 Har elevenes volumforståelse økt fra 9.klasse til grunnkurs i vgs.? 67
5.12 Testens utforming – spiller den noen rolle? 68
5.13 Oppsummering 69
Kapittel 6 En kvalitativ analyse av elevbesvarelser 71
6.1 Innledning 71
6.2 Volumbegrepet 72
6.2.1 Hvor mange av terningene til venstre vil få plass i den store esken? 72
6.2.2 Sigrids kloss 74
6.3 Volum - overflate 75
6.3.1 Beregning av overflate 75
6.4 Volumbegrepet – størrelser 78
6.4.1 Vil det være plass til 4 personer i en kasse med volum 1 m^3 ? 78
6.4.2 Kroppen til en voksen mann 80
6.4.3 Tegn et forslag til hvordan en kasse på 0,5 m^3 kan se ut 83
6.5 Volumbegrepet – dimensjoner 86
6.5.1 Hvor mange terninger med sidekant 0,5 cm får plass i den store esken? 86
6.5.2 Måleglasset – sett av merket for 3 dl 89
6.6 Oppsummering 91
6.6.1 Oppbygging av volum 91
6.6.2 Volum – overflate 91
6.6.3 Volumbegrepet – størrelser 92
6.6.4 Volumbegrepet – dimensjoner 92

6.6.5 Sammendrag 93
Kapittel 7 Funn 95
7.1 Innledning 95
7.2 Oppbygging av volum 95
7.3 Volum – overflate 96
7.4 Volumbegrepet – oppfatning av størrelse 97
7.4.1 Hvor stort er 1 m^3? 97
7.4.2 Volumet av kroppen til en voksen mann 98
7.4.3 Hvordan ser en kasse på 1 m^3 eller 0,5 m^3 ut? 99
7.4.4 Omgjøring av enheter 99
7.5 Endring av dimensjoner 100
7.5.1 Endring i enhetterningens dimensjon 100
7.5.2 Endring av måleglassets dimensjon 101
7.6 Funn 101
7.7 Avsluttende kommentarer 103

Referanser 105

Vedlegg 109

Kapittel 1. Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av problemstilling.

Denne hovedoppgaven er en del av KIM - prosjektet. KIM står for ”Kvalitet i matematikkundervisningen”. Dette er et samarbeidsprosjekt mellom Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling (ILS) ved Universitetet i Oslo og Telemarksforskning, Notodden. Oppdragsgiver var Kirke-, Undervisnings-, og Forskningsdepartementet, og prosjektet startet i 1996.
Jeg antar at begrunnelsen for oppdraget har vært norske elevers relativt dårlige resultater på internasjonale tester i matematikk, og et bidrag, i den sammenheng, å finne ut noe om norske elevers måte å tenke matematikk på og deres evne til å løse oppgaver.

Hovedhensikten med prosjektet har vært å gi lærerne hjelp til å forstå elevenes begrepsforståelse i matematikk.

Andre mål for KIM - prosjektet er:

- Å utvikle diagnostiske tester i ulike områder i matematikk som et grunnlag for læringsaktiviteter.
- Å gi en oversikt over alternative begreper i matematikk som norske elever har (3 –11 klasse)
- Å utvikle undervisningsmateriale for lærere der alternative begreper oppstår.

Gjennom KIM - prosjektet er det utviklet diagnostiske oppgaver til elever i 6. og 9. klasse i ungdomsskolen etter Mønsterplan for grunnskolen M 87 på en del områder som:

- Tall og tallforståelse
- Funksjoner
- Geometri
- Måling og enheter

På noen områder er det også utviklet diagnostiske oppgaver for elever i grunnkurs i videregående skole. Jeg har vært involvert i å utarbeide diagnostiske oppgaver innenfor området **Måling og enheter** for elever i videregående skole. Testen ble gjennomført blant elever på grunnkurs på alle studieretninger i et utvalg av landets videregående skoler i januar 2000.
Disse grunnkurselevene har fulgt mønsterplan for grunnskolen, M 87.

Min deltagelse i å utarbeide oppgavene har vært relativ beskjeden. Mange av oppgavene går igjen fra testene for 6. og 9. klasse som allerede er avholdt. Et av prosjektets forutsetninger var å undersøke om det finner sted en utvikling på området ettersom elevene blir eldre.

Noen av oppgavene er nye og andre er endret i forhold til tidligere diagnostiske oppgaver innen området Måling og enheter (Nortvedt 1998). En del av oppgavene har jeg prøvd ut på egen skole i klasser innenfor studieretning for Helse- og sosialfag. Hensikten var å finne ut om oppgavene fungerte diagnostisk, dvs. at de viste misoppfatninger blant elevene. Det er altså ikke tilfeldige feil en er på jakt etter, men etter elevers ufullstendige/begrensede tenkemåte .

Den endelige utforming av oppgavene har Telemarksforskning hatt ansvaret for. Likeledes har Telemarksforskning hatt ansvar for den praktiske gjennomføringen av testen.

Min oppgave har vært å analysere utfallet av disse diagnostiske oppgavene og dermed bidra til at KIM - prosjektets mål blir oppfylt.
Oppgavene har omfattet lengdemål, areal, volum, vinkelmål, tid, fart, tetthet, masse, omgjøring av enheter, målestokk, nøyaktighet og benevninger. Se vedlegg nr 1.

Resultatet av dette arbeidet er mangslungent. Dersom en ser på det svaret som er **rett svar** og som er kodet med tallet 1, varier resultatet fra 3,4 % av elevmassen som har **rett svar** på oppgave 20 a) til 91,4 % på oppgave 6.

Resultatet varierer også fra studieretning til studieretning på de ulike oppgavene, alt etter oppgavens vanskelighetsgrad som nok oppfattes forskjellig på de ulike studieretningene.

Det som imidlertid først og fremst fanget min interesse var oppgavene 11 og 16:

**11) Vil det være plass til 4 personer i en kasse med volum 1 m^3 ?
Forklar hvorfor.**

16) Tegn et forslag på hvordan en kasse på 0,5 m^3 kan se ut, (sett på mål).

Dette er spesielle og uvante oppgaver, og 25 % av elevene gir ikke svar på dem.
Henholdsvis 18,5% og 12,8% av alle elever (n = 650) svarte korrekt på disse to oppgavene.
De andre svarene som gis, viser at elevene har problemer med uvante oppgaver og at volumforståelsen er svakere enn vi tror.

Ut fra svarene på oppgavene i denne KIM – undersøkelsen ser det ut til at elever i grunnkurs i videregående skole kanskje ikke har de kunnskapene og den forståelse for Måling og enheter som vi forventer av dem på dette nivået.

1.2 Mål for oppgaven.

I M 87 er Måling og enheter et hovedemne. Problemløsing er også et hovedemne, samtidig som det er en metode å arbeide etter for at elever skal få gode og varige kunnskaper i matematikk.
Denne hovedoppgaven tar for seg elevers forståelse for Måling og enheter generelt, men jeg vil spesielt se på elevers forståelse av volumbegrepet. Jeg vil også se om det er spesielle oppgaver som skaper problemer; oppgaver som er uvante og som kan betraktes som problemløsingsoppgaver. Enkelt vil problemformuleringen bli:

Volumforståelse hos elever på grunnkurs i videregående skole.

Siden jeg vil ta for meg oppgaver fra KIM - prosjektet som er uvante volumoppgaver, vil en del av oppgaven min være å se hvordan elevene tenker når de skal løse slike oppgaver.

For å kunne si noe om volumforståelsen blant elever på grunnkurs i videregående skole, vil jeg ta for meg de to oppgavene som nevnt i 1.1, samt noen få andre oppgaver som også viser hvordan elever forstår volumbegrepet.
Det vil bli foretatt en kvantitativ analyse av resultatet av de diagnostiske oppgavene som måler volumforståelse. For å få en dypere forståelse for elevenes besvarelser, vil jeg trenge utdypende forklaringer på oppgavene. Det vil jeg gjøre ved å se på et utvalg av oppgaver som jeg i ettertid ga til mine egne elever.
Spesielt vil jeg analysere elevenes praktiske tilnærming til problemstillinger, og se på deres vurderingsevne i problemløsingssituasjoner.

1.3 Organisering av oppgaven

Oppbyggingen av hovedoppgaven vil derfor bli slik:

1) En teoretisk bakgrunn fra litteratur jeg har satt meg inn i om læring, læring i matematikk generelt og i hovedemnene Måling og enheter med hovedvekt på volum og problemløsing spesielt.

2) Analysere mønsterplanen av 1987 med hensyn på hovedemnene Måling og enheter og Problemløsing. Volumbegrepet blir det sentrale fra det første hovedemnet.

3) Analysere lærebøker og eksamensoppgaver for å se hvordan disse hovedemnene er i varetatt

4) Analysere resultatet fra KIM – undersøkelsen og se på noen diagnostiske oppgaver som måler volumforståelse.

5) Resultatet fra den nasjonale testen vil bli sammenlignet med elevsvar fra egne klasser for å utdype analysen.

Før jeg fortsetter vil jeg se på matematikkopplæringen i et historisk perspektiv.

1.4 Et kort tilbakeblikk over matematikkopplæringen

Så langt tilbake en har nedtegnelser, det være seg på leirtavler eller papyrus ruller, har en funnet matematiske problemer som folk har vært opptatt av og som de har hatt teknikker for å løse. Den greske matematikeren Pappus ca.250 e.Kr. formulerte allerede tanker om problemløsing og løsningsstrategier (Solvang,1992).

Norsk skolehistorie viser at matematikkfaget har variert mellom å være et allmenndannende og et nyttig fag. Spesielt var regning i folkeskolen praktisk og nyttig, mens realskole og gymnas hadde en matematikk som var relativ teoretisk og skulle gi grunnlag for videre studier.

Folkeskolelovene av 1936 forutsatte en normalplan hvor arbeidsskoleprinsippet skulle være en vanlig arbeidsform. Da skulle elevene, i alle fag, utvikles gjennom aktivitet og produktivitet, og det var det virkelighets nære liv som i form av arbeid, skulle inn i skolen. Pedagogen John Dewey og psykologen Georg Herbert Mead formulerte slagordet *"Learning by doing"* som skulle indikere en skole for livet.

I svensk lærertidning, nov.1884 er J.P.Velander sitert:

"Forstand og omdømme utvikles best og mangesidig på induktiv vei", dvs. ved aktivitet!

I perioden 1900-1950 var det flere som hevdet at en måtte ha en mer praktisk matematikkundervisning og at problemløsing skulle være et middel, et instrument for å nå undervisningsmålet, nemlig matematisk forståelse.
Flere mente at en måtte anskueliggjøre undervisningen, slik at det ble erfaringskunnskap, (Emanuelsen et al, 1991).

Den amerikanske matematikeren Georg Polya er vel den som på 1900-tallet har gjort mest for å få problemløsing som en arbeidsform i matematikkundervisningen. Boka "How to solve it " fra 1945 var et viktig bidrag uten at den fikk den effekten den fortjente. Den var i hvert fall starten på nye tanker og studier om hvordan matematisk forståelse oppstår blant elever, og det var spesielt selve tankeprosessen han var opptatt av.

Etter Sputnik - sjokket i 1957 ble læreplaner i matematikk og naturvitenskapene i USA. fornyet. Det resulterte i innføring av moderne matematikk for matematikkens del. Denne matematikken spredde seg til Europa og fikk innpass i mange lands læreplaner. Senere ble denne formalistiske matematikken utsatt for sterk kritikk, spesielt på barnetrinnet. Den ble for abstrakt for svært mange elever, og mange lærere vegret seg for å gå inn i den av ulike grunner.

På 1970 tallet svingte pendelen, og ny matematikk ble erstattet med *" back to basic"* - bevegelsen. Nå var ideen at elevene i hvert fall skulle lære grunnleggende fakta og begreper som den høyere form for matematikk skulle hvile på.

I Norge fikk ikke denne bevegelsen så sterk utbredelse, og det oppsto en problematisk situasjon fordi en ikke hadde noe alternativ til den tradisjonelle matematikken på ungdomstrinnet (Gjone 1994). Et utvalg ble nedsatt, Matematikkutvalg for grunnskolen, som definerte mål for matematikkundervisningen. Selv om matematikken nå fikk et større innslag av nytte, mente mange at den enda var for teoretisk.

Med Mønsterplan av 1987, M 87, kom problemløsing inn som ett av ti hovedmomenter. Bakgrunnen for dette var at elevene skal øves opp til logisk tenkning. Videre var det i overensstemmelse med at elevene skulle ha innsikt i grunnleggende ferdigheter og metoder i matematikk.

Det har vært mange forskningsprosjekter på læring i matematikk og kanskje enda mer på læringsprosessen generelt. Noen har forsket på fliker av hva som virker på forståelsen, mens andre har prøvd å se på ulike områder som til sammen virker inn på læringsprosessen. Fremdeles står det mye igjen.

1.5 Oppsummering

Matematiske problemer og opplæring i matematikk er av gammel dato.
Likevel er det vel rett å si at det var først på 1900 tallet at det ble forsket på forståelse, både generelt og i matematikk. Spesielt er det i de siste 30-40 årene gjort mye på området. I USA har det vært forsket mye på området over lengre tid. Andre land har også bidradd sterkt i den senere tid.

Også her i Norge har det kommet til nye ideer om hvordan barn og ungdom lærer.
KIM - prosjektet er et lite bidrag for å se på elevers måte å tenke matematikk på.
Ved å studere den diagnostiske testen som ble foretatt januar 2000 for elever i grunnkurs i videregående skole på området **Måling og enheter**, vil jeg prøve å si noe om deres volumforståelse. Det vil skje gjennom en analyse av resultatene fra den diagnostiske testen og elevsvar fra egne elever på noen oppgaver, sammenholdt med teorier som er med på å forklare resultatet.

Kapittel 2. Filosofi og epistemologi

2.1 Innledning

Matematiske problemer har en hatt i all tid, og matematikkundervisningen går jo ut på å lære metoder for å kunne løse problemer/oppgaver.
Etter en periode på 1960-tallet med moderne matematikk som deretter ble fulgt av en periode med *"Back to basic"* - bevegelse, så det ut til at elevers matematikkforståelse og elementære regneferdigheter var så dårlig at det var nødvendig å komme med forslag til nye læreplaner. .

Mønsterplanen av 1987 – M 87 ble innført i norsk grunnskole, og sammen med de tradisjonelle temaene kommer problemløsing kommer inn som et hovedmoment i læreplanen. Samtidig er begrepet kommet inn i mange andre lands undervisningsplaner i matematikk.

Profesjonelle matematikere ved universitetene har opplevd studenters mangelfulle evne til å løse nye problemer i matematikken, en arbeidsmåte som de er uvant med og som sannsynligvis skyldes at det er et forsømt område gjennom mange år.

Samtidig er det stadig færre elever som velger realfag, spesielt matematikk og fysikk, og stadig færre studenter som ønsker å studere tekniske og naturvitenskapelige fag. Dette skjer på tross av at disse fagene gir høy samfunnsmessig status og gode lønninger. Omtrent halvparten av ungdommen orienterer seg mot humanistiske, sosiale, pedagogiske og samfunnsmessige områder.

Allerede i mønsterplanens, M 87, generelle del - kapitel 7 - Lærestoff, sies det at

> *"skolen må sørge for at elevene får lære seg ulike arbeidsmåter og ta del i ulike problemløsings prosesser. Elevene bør bl.a. få erfaringer i å observere, eksperimentere, stille spørsmål, tolke, forstå og forklare, se etter helheter og deler, motsetninger og sammenhenger….."*

I fagplandelen - kapitel 26 – Matematikk – er problemløsing stilt opp som ett av til sammen ti hovedemner.
Hva som egentlig menes med problemløsing er også her uklart.[1]

Hva det vil si å forstå matematikk har vært et tema som det har vært ulike syn på i løpet av 1900- tallet. Likeledes har det vært ulike syn på læring og læringsprosesser.

2.2 Om læring

Opplæring i skole er blitt mer målrettet i den senere tid, med M 87 og L 97 (læreplan av 1997 for grunnskolen), samt R 94 (reform av 1994 for videregående skole).
Dette har nok sammenheng med forandringer i samfunnet generelt; rasjonalitet, markedsstyring og økonomi er fyndord. Spesielt er det utgifter til det offentlige som stadig må reduseres på noen områder for å kompensere de områder der utgiftene stadig øker.
Ved innføring av R 94 uttalte daværende statsråd Hernes at "samfunnet måtte få mer ut av den samlede befolkning", og mente da både kunnskapsmessig og økonomisk.

[1] Se 2.2.4

Læring er imidlertid et komplisert begrep. Det er ikke slik at det som blir undervist også blir lært. Noe oppfattes, noe misoppfattes og samtidig skjer det en medlæring eller bivirkninger av opplæringssituasjonen. Kanskje er det det viktigste som skjer?
Læring er en integrert prosess. Det er både den indre psykiske tilegnelses- og forarbeidings prosessen som fører fram til læringsresultatet, men samtidig er det et samspill mellom et individ og dets omgivelser. Knud Illeris mener at all læring omfatter tre dimensjoner: En kognitiv prosess, en psykodynamisk prosess (følelser, holdninger og motivasjon) og en sosial og samfunnsmessig prosess. Han sier at den kognitive læring alltid er affektiv "besatt". Forståelse og oppfattelse, viten og innsikt, virker inn på de følelsesmessige mønstre (Illeris, 1999).

2.2.1 Læring – litt historikk.

Behavioristene holdt lenge stand med sine eksperimenter med dyr og med sitt psykologiske syn på læring som et resultat av trening. "Du blir god i det du trener på, men det har liten overføringsverdi," var E. L. Thorndikes (1901) teori, (Illeris,1999).

Senere kom Piaget (1928, 1930, 1971) med sitt konstruktivistiske syn på læring. Mennesket tolker verden ut fra de erfaringer det selv har opplevd og hva det vet. Verden oppfattes og forstås ikke direkte. Mennesket bygger opp skjemaer gjennom en konstruksjons- og rekonstruksjonsprosess der nye påvirkninger relateres til allerede utviklede skjemaer. Likevekten opprettholdes ved assimilasjon og akkomodasjon (Illeris,1999).

I 1945 var Gestaltistene på banen. De var opptatt av dypere tankevirksomhet, av det mentale, uten at de hadde teorier som støttet opp om deres forskning. De mente at hukommelsen forsøker å tolke innkomne signaler til en organisert helhet. Gir dette mening, vil en kunne fortsette å bygge opp forståelse og kunnskap (Illeris, 1999).

Konstruktivismen har holdt stand og har etter hvert blitt forsterket. I Jerome Bruners bok "Utdannelseskulturen"(1998), sier han at det konstruktivistiske perspektiv ligger implisitt i alt. Dette syn forekommer ikke i hans forfatterskap fra 1950-1960 årene, men dukker opp i 1980 årene. I starten er han mest opptatt av å "gjøre" ved for eksempel aktivt å stille spørsmål, mens han senere hevder at å lære er å gjøre noe sammen med andre – sosial konstruktivisme.

Den sosiale konstruktivismen er det mange forskere på området som har hengt seg på. I tillegg til Piaget og Bruner kan nevnes Ausubel og Vygotski og den engelske utdannelsessosiologen Peter Jarvis (Illeris,1999).

Andre begreper som er kommet inn i den senere tid når det gjelder innlæringsprosessen er refleksjon og metalæring, (metakognition).

Refleksjon eller ettertanke krever altså en hvis grad av energi for å bearbeide en problemstilling – det er altså en viss tidsforskyvning i arbeidet. Karl Duncer (1935) er en av de første som utforsket problemløsningens psykologi. Ettertanke har karakter av problemløsing (Illeris, 1999).

Metalæring, et begrep som oppstod i 1970 årene, innebærer at en forstår sin egen måte å lære på. Det er en overordnet form for læring av generell karakter på tvers av de enkelte

læreprosessene i et samlet overordnet perspektiv (Illeris 1999). En kan vel også si at flere ”skjemaer” bringes sammen og settes i forbindelse med hverandre på en ny måte, slik at det dannes en overordnet forståelse som overskrider tidligere skille.
Også dette begrepet er diffust, men det har likevel bidradd til at en nå vet mer om hva som virker inn på tilegnelsen av kunnskap.

Læring ble før betraktet helt uavhengig av følelser. Dette synet har endret seg og en har i dag en klar oppfatning om at følelser har betydning for læringsutbyttet. Riktignok er det følelsesmessige mer eller mindre ubevisst i forbindelse med læring. Piaget endret også sitt syn på hva som virker inn på læring, og kom til at motivasjon og følelser har betydning.

2.2.2 Om læring i matematikk.

En kan stille spørsmål om læring i matematikk skiller seg fra læring i andre fag.
Folk flest oppfatter nok faget matematikk som et spesielt fag der det skal finnes et svar som framkommer som et resultat av en metode når visse opplysninger er gitt, og ellers gjelder det om å pugge formler og bruke de rett.

Men å lære matematikk er

- å lete etter løsninger, ikke bare huske prosedyrer
- å lete etter mønster, ikke bare memorere formler
- å formulere sammenhenger, ikke bare løse oppgaver

(National Research Counsil (1989): Everybody counts)

Polya hevder at å lære matematikk er en aktiv prosess. Å lære å tenke matematisk betyr å utvikle en matematisk forståelse hvor selve prosessen er viktigst, og å utvikle matematisk kompetanse.
Dette er i og for seg ikke annerledes i matematikk enn i andre fag.
Likeledes er læring i matematikk som i andre fag en sammensatt prosess. Læring tar plass i en sosial sammenheng der motivasjon, følelser og samspillprosesser er avgjørende for resultatet.

Læring er også en individuell prosess. I hvilken grad en er i stand til å skaffe seg kunnskap på et område, skyldes ens personlighet og hva som foregår i hjernen. Om læring skal finne sted må det stoffet som skal formidles, være innenfor rekkevidden av det en kan forstå ut fra gitte forutsetninger. Hvordan stoffet blir formidlet, er også avgjørende for læringsresultatet. En må også være motivert for å lære og se hensikten med det. Alt dette henger sammen og er med å påvirke resultatet.
I klasserommet gjør læreren en del valg ut fra hvordan en tror barn og unge lærer.
I ”A Theory and Practice of Learning College Mathematics” (Schoenfeld, 1994) setter Ed Dubinsky fram fire muligheter for hvordan folk lærer:

- **Spontant**. Dersom en har tro på at man lærer ved å se på illustrasjoner eller ved å lytte, vil en presentere stoffet verbalt, i skrevet eller billedlig form og forvente at en selv lærer seg matematikk.
- **Induktivt**. Dersom en tror at man lærer ved å arbeide med mange eksempler og trekke fellestrekk og viktige ideer fra de erfaringene en gjør, og videre organisere informasjonen i hjernen, så vil en bruke mye tid på eksemplene.

- **Konstruktivt**. Dersom en tror at man lærer ved å lage mentale konstruksjoner når en arbeider med matematikk, vil en prøve å forstå hvordan det skjer og hjelpe til slik at det skjer.
- **Pragmatisk.** Dersom en tror at matematikk læres som en respons på et problem på et annet område, vil en prøve å finne mange anvendelser.

Videre mener han at en overveiende stor del av undervisningen i matematikk, er basert på en forestilling om at matematikk læres spontant og induktivt, og at matematikk er en slags kombinasjon av kunnskap og teknikker.
Dersom dette er tilfelle og undervisningsmetodene følger dette mønsteret, vil nok mange elever få problemer i matematikk. Det er helt nødvendig å lære seg teknikker, men hvordan en tilegner seg kunnskap som kan brukes i ulike sammenheng, er høyst forskjellig.

Nå setter Ed Dubinsky fram en teori om hva matematisk kunnskap er:

> *"A persons mathematical knowledge is her or his tendency to respond to certain kinds of perceived problem situation by constructing, reconstructing, and organising mental processes and objects to use in dealing with the situation".*

Dette er en svært generell teori som en kan knytte mange kommentarer til:
En persons tendens til å respondere kan arte seg forskjellig på forskjellige tidspunkt og på forskjellige steder, og det er vanskelig å vite om personen virkelig "kan stoffet."
Noen ganger er det også tvilsomt om en elev oppfatter et problem slik det er intendert fra lærerens side.
En elevs evne til å konstruere, rekonstruere og organisere kunnskapen mentalt vil variere med tiden og med den sammenhengen kunnskapen presenteres i. Her høres det ut til at det er helt og holdent personen selv som konstruerer kunnskapen, radikal konstruktivisme.
Dubinsky kaller denne form for konstruktivisme: "reflektiv abstraksjon". I korthet går det ut på at kunnskap må bygges opp gjennom handling. Ved start blir det å følge en algoritme. Etter hvert som en lærer seg å bruke kunnskapen i forskjellige sammenhenger, blir handlingen internalisert og blir en "prosess". Nå blir det mulig å bruke prosessen for å oppnå nye prosesser, ved å bruke den motsatt vei eller ved å knytte den til andre prosesser. Jeg vil si at eleven da har opparbeidet seg en handlingskompetanse og Dubinsky sier at dette er et "objekt".
En kan gjerne være enig i denne teorien; det er vel faktisk slik kunnskaper i matematikk bygges opp, men at dette skjer vil være avhengig av mange faktorer.

Thomas A. Romberg knytter det å tenke matematisk til problemløsing eller å løse utradisjonelle oppgaver. Han er hovedforfatteren av "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics" (NCTM, 1989), der det er satt opp forslag til nye mål for å redefinere skolematematikken og læreplanene i USA (Schoenfeld, 1994).
Romberg viser til analogier, og hevder at det å "gjøre" noe, er noe helt annet enn "å ha kunnskap om noe". Så også i matematikk. Han mener, som så mange andre forskere på området, at en må komme vekk fra at elevene praktiserer ferdigheter. Problemløsing og kommunikasjon er framhevet som viktig, men det fordrer interessante problemer som kan løses ved å bruke viktige matematiske ideer. I klasserommet skulle disse brukes ved å foreta virkelige målinger, samle informasjon og beskrive egenskapene ved et objekt ved å bruke statistikk, eller å utforske egenskapene til en funksjon ved å studere en graf.

Også Rombergs læringssyn baserer seg også på konstruktivismen. Det er eleven selv som må arbeide aktivt for å skaffe seg ny kunnskap, eventuelt reorganisere den kunnskapen en måtte ha skaffet seg, men som ikke lenger er tilstrekkelig eller som er misoppfattet.

- Da må det etableres en situasjon hvor det oppstår en konflikt med eksisterende begrep/ kunnskap.
- Det må finnes alternative begreper som er forståelige.
- De alternative begreper må være sannsynlige.
- De alternative begrepene må ses som fruktbare, brukbare eller verdifulle.(s.288)

For at dette skal lykkes, må eleven oppfatte en aktivitet så oppmuntrende at en er villig til å bruke tid og krefter på å forstå hva problemene består i.
Romberg har altså en visjon om at elevene, gjennom aktiv problemløsing og matematisk tenkning, vil få et annet syn på og andre holdninger til sin egen matematiske kunnskap.

Frank K. Lester, Jr. mener at med den type undervisning som konsentrer seg om læring av fakta og ferdigheter, er det en fare for at elevene blir rigide i sin tenkning, ikke fleksible og smidige som man ønsker. Han mener at elever må læres opp til å få kunnskap om **når** de skal utføre spesielle ferdigheter eller prosedyrer, og **hvorfor** de skal det (Silver 1985).

Også Jeremy Kilpatrick sier at for å løse problemer eller uvante oppgaver i et område i matematikk, må elevene ha et stort lager av organisert kunnskap som de kan hente fram, og teknikker som gjør at de kan omforme problemet. Videre må de ha kunnskap om sin egen læring (metalæring) slik at de kan vurdere og revurdere sin framgang, (Silver 1985).

Alan H. Schoenfeld sier bl.a. i ”Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical Understanding” at elevers vanskeligheter i matematikk skyldes at det i undervisningen fokuseres mer på å mestre fakta og ferdigheter enn å ”forstå”. Dette, sammen med manglende evne til å vurdere sin egen læring, gjør det vanskelig å utvikle evnen til å tenke matematisk. Schoenfeld sier at matematisk kompetanse består i å kunne bruke ressursene som står til disposisjon på en effektiv måte når en arbeider med uvanlige problemer. Å mestre formelle teknikker er en ting. Å kalle dem fram når det trengs, forkaste det som ikke kan brukes, å støtte seg på intuisjon som korrespondere med formelle prosedyrer uten å være avhengig av intuisjonen, vil sammen med vurdering av de framskritt en gjør, gjøre en kompetent i matematikk (Silver 1985).

Det er altså mange teorier som peker i samme retning. Ved å fokusere på fakta og ferdigheter blir elevene lite fleksible til å løse utradisjonelle oppgaver. De læres ikke opp til å se at det de lærer i ett område kan overføres og brukes i andre områder. Er det derfor vanskelighetene med å løse nye typer oppgaver oppstår? Dette kan være en forklaring, men det kan også tenkes at elevene ikke finner det de skal lære i matematikk interessant og aktuelt. Vi kjenner alle til spørsmål av typen ”hvorfor må vi lære dette”? Som lærer er det ikke alltid like enkelt å motivere for et område i læreplanen, og finne aktuelle og gode problemer som passer inn i undervisningen.

2.2.3 Måling og enheter

Måling og enheter er et av emnene i M 87, og det emnet som denne delen av KIM – prosjektet omhandler.
Hvordan kan det som er sagt om læring i matematikk generelt overføres til læring av begrepene lengde, areal og volum? Hvordan kan elevene få forståelse for måleenheter det er naturlig å bruke, og sammenhengen mellom dem?

Som Romberg sier må elevene arbeide aktivt for å skaffe seg ny kunnskap.
For at det skal skje en utvikling i målebegrepet, må en kunne sammenligne størrelser med en gitt referanse; gjerne starte med aktiviteter der en bruker begrepene større/mindre om ting som barn er opptatt av. Det fører fram mot ordningsrelasjoner som nærmer seg en kvalitativ sammenligning av størrelser. På samme måte må en kunne sammenligne lengder, areal og volum. Videre må en kunne kvantifisere, vite hvor stort "noe" er. Det betyr at en må tillegge måltall til enkelte størrelser; å bruke tall til å fortelle hvor lange de er i forhold til en standard størrelse, en enhet (Breiteig og Venheim s.42 i bind 2).

Brucker (Kirfel, Brucker, Herbjørnsen,1998, s.57) skiller mellom *direkte* og *indirekte* måling. Når en finner størrelsen av et areal ved å fylle arealet med arealenheter, er det direkte måling. Når en på et senere stadium utvikler formler for beregning av arealet av spesielle flater som rektangel, trekant eller sirkel ved å måle sidelengde eller radius, kaller han det indirekte måling.
Brucker mener at for mange elever vil en for rask overgang til indirekte måling kunne resultere i en svak begrepsforståelse. De skjønner ikke sammenhengen mellom de størrelsene, *hjelpestørrelsen*, vi måler, og det vi får ut ved beregning fra formler.

Hovedemnet Måling og enheter kan ikke løsrives fra hovedemnet Geometri. Lengder, flater og romlige legemer er jo geometriske begreper. Herbjørnsen (Kirfel et al, 1998, s. 13) sier:

> *"Det vi vet, er at elevene som ikke har hatt en mer kreativ og skapende tilnærming i barneskolen, opplever møtet med den teoretiske geometrien som en fremmed og teoretisk verden. Det vi også vet, er at begreper som sirkelflater, vinkler og symmetri og så videre ofte oppfattes som hjemmehørende i matematikkboka og bare der".*

Hun ønsker en større nærhet mellom praktisk anvendelse og skolegeometrien, og at elevene får sin nysgjerrighet og glede over faget i behold gjennom skoletiden.

Det er gjort flere undersøkelser på hvordan barn utvikler *romlig* evne. Piaget mener at det er først når et barn har nådd det formelt - operasjonelle stadiet at det har full forståelse for målebegrepene. Piaget mente at det var rundt 11 eller 12 år. Mange studier fra Storbritannia og USA hevder at dette skjer på et mye senere nivå, og for de fleste barn først når de forlater skolen (Dickson et al.,1984,s.85). For mange skjer det ikke i det hele tatt.

En NAEP[2] undersøkelse fra USA fant at de fleste 13 og 17-åringer var fortrolige med grunnleggende målebegreper og var dyktige når en dimensjon var involvert. Mange hadde ikke full forståelse for grunnleggende areal og volumbegreper. De brukte i store trekk utenat lærte formler og hadde problemer med enkle problemstillinger (Dickson et al, 1984,s.86).

[2] NAEP: National Assessment of Educational Progress (1980) Mathematical Technical Report: Summery Volume

Det blir hevdet at de misoppfatningene barn utvikler om *rommet* først og fremst skyldes inadekvat undervisning der barna har fokusert på feil kriterier og derfor utviklet begrensede eller gale begreper (Dickson et al.,s.29).

Måling og enheter i opplæringen er nok vanskeligere enn vi tror, og her trengs det tid og praktiske forsøk for å få en solid forståelse i emnet.

2.2.4 Volumforståelse

I "*Matematikk for lærere"* lister Breiteig og Venheim (1993 s.56) opp de fundamentale egenskapene ved volumbegrepet :

- *Volum er et mål for tredimensjonal utstrekning, for en romstørrelse.*
- *To områder som er like i form og størrelse, det vil si at de er kongruente, har like stort volum.*
- *Det samlede volumet til områder som er disjunkte, er lik summen av enkeltområdenes volumer*

Det ble hevdet at misoppfatninger barn utvikler om *rommet* først og fremst skyldes inadekvat undervisning der barna fokuserte på feil kriterier og derfor utviklet begrensede og gale begreper (se 2.2.3).

Det kan skyldes tidlig innlæring av formler der barna ikke får praktisere oppbygging av volum for kuber, rette prismer og andre enkle romlige figurer ved hjelp av *enhetsterninger.* Tilsvarende vil barn mangle praktisk erfaring med å fylle beholdere med vann slik at de kan se at vannsøylas nivå vil avhenge av beholderens form og størrelse.

For tidlig innlæring av formler, fører til en automatisering og en reflekterer ikke over hvordan en kommer fram til et svar. Å finne volumet av et prisme framkommer ved å multiplisere lengde med bredde med høyde uten å tenke over at det er måltall for lengde, bredde og høyde en finner produktet av.

Det kan også tenkes at ordet volum er en hindring ved tidlig innlæring. Kanskje vil det være bedre å bruke begrepet rominnhold for yngre barn, både i dagliglivet og i matematikken; det er et ord som norske elever vil ha et forhold til; assosiere noe med. Da vil det muligens være lettere å skille mellom rominnhold og overflate av legemer.

I matematikkopplæringen bruker en oppgaver om ideelle situasjoner. En ser ofte bort fra veggenes tykkelse når en skal finne hva noe rommer. Det kan skape forvirring når et legeme skal fylles med noe, å finne et indre volum, når en ikke tar hensyn til veggenes tykkelse.

2.2.5 Problemløsing i matematikkopplæringen

Problemløsing er som nevnt et hovedemne i M 87, et emne som også er en metode som skal brukes i alle emner i matematikkopplæringen. De oppgavene som blir behandlet i denne hovedoppgaven er til dels uvante for elevene og kan derfor også betraktes som problemløsingsoppgaver. Hva forstår en da med problemløsing i matematikk?

En kortfattet forklaring kan formuleres slik:

> *"å finne en vei, en strategi, for å takle en ukjent situasjon, det vil si en situasjon en ikke tidligere har truffet på, og derfor ikke har en metode til å løse".*
> (Solvang, 1992)

> *"Å løse et problem er å finne en vei hvor ingen vei er direkte kjent, å finne en vei ut av en vanskelig situasjon, å finne en vei rundt en hindring, å komme fram til et ønskelig mål som ikke kan nås umiddelbart, ved hjelp av passende midler".*
> (Oversatt etter et sitat av Georg Polya)

Anthony Orton formulerer det slik:

> "*Problemløsing er en prosess der elevene kombinerer tidligere lærte kunnskaper, regler, teknikker, ferdigheter og begreper for å gi en løsning på en ny situasjon".*
> (Min oversetting)

Matematikk er både et produkt og en prosess. Produktet er den organiserte kunnskapen og prosessen er den kreative aktivitet som trengs.

Men er så problemløsing i matematikk noe nytt en har kommet på i den senere tid?
Hvorfor er det tatt inn i M 87?

Pedagoger og psykologer har fra tid til annen hevdet at matematikken i skolen, i hvert fall i grunnskolen, må bli mer virkelighetsnær. En må ta utgangspunkt i barnas omgivelser, enten i velkjente ting eller i matematiske objekter som vi ønsker at barna skal lære noe om.

En ønsker videre å komme vekk fra mekaniske lærte ferdigheter. En har gjerne betraktet matematikkfaget som noe uforanderlig, statisk, med lover og regler som ikke forandres. Dermed har matematikk som skolefag blitt stående som et spesielt fag som skiller seg fra andre fag som i mye større grad følger med tiden.

I vår teknologiske tid har en etter hvert fått øynene opp for at matematikk og fysikk er fag som en må satse spesielt på for at en ikke skal bli akterutseilt, både i forhold til andre land og i forhold til det som skjer på den teknisk-naturvitenskapelige arena.
Matematikkopplæringen må følge med i utviklingen av samfunnet; den må bli mer dynamisk og elever og studenter må læres opp til å kunne bruke kunnskapene sine mer fleksibelt. Problemløsing er dermed kommet inn i læreplanene.

Som sagt er begrepet problemløsing et diffust begrep; det er mange meninger om det og mange tolkninger. Spørsmål en kan stille seg er hva målet med matematikkopplæringen er, og hvordan problemløsing passer med målene. Videre kan en stille spørsmål med hva matematikk er, og hva det vil si å kunne matematikk.

Svar på det siste spørsmålet favner vidt; fra det å kunne fakta, ha ferdigheter, skjønne begreper og se sammenhenger til det å kunne eksperimentere og se mønster for deretter å kunne generalisere. Dette burde også være målet med matematikkundervisningen.

Et sitat fra Everybody Counts [3] sier noe om hva matematikk er:

> *"Matematikk er et levende fag der en søker å forstå mønstre som gjennomtrenger både verden rundt oss og vår forståelse. Skjønt matematikkens språk er basert på regler som må læres, er det viktig å motivere studentene til å bevege seg ut over reglene for å være i stand til å uttrykke ting med matematikkens språk. Denne transformasjonen anbefaler både forandring i læreplanene og i undervisningsmetoder* "(Schoenfeld, 92).
> (Min oversetting)

En undersøkelse ved avdeling for matematikk ved et college i USA. avslørte følgende kategorier av mål for et kurs i problemløsing:

- Å trene studentene i å tenke kreativt og /eller å utvikle deres evne til å løse problemer i matematikk
- Å forberede studenter til Putnam konkurranser eller til nasjonale eller internasjonale Olympiader i matematikk
- Å gi potensielle lærere en enkel innføring i heuristiske strategier
- Å lære standard teknikker på et område; for eksempel i modellering i matematikk
- Å gi en ny tilnærming til støtteundervisning (grunnleggende kunnskaper) eller å forsøke å oppøve "kritisk tenking" eller "analytisk resonnering" (Schoenfeld, 1992).

Dette viser at problemløsing i matematikk ble betraktet svært ulikt blant kursholderne.

Tradisjonelt har uttrykket blitt brukt for å

- Rettferdiggjøre matematikkopplæringen – gjerne ved å presentere problemer som er virkelighetsnære
- Motivere for et tema i matematikkopplæringen
- Som avveksling i undervisningen
- Som en måte å utvikle nye ferdigheter på
- Trene på oppgaver etter at en teknikk er vist (Stanic and Kilpatrick,(1988) ref. i Schoenfeld 1992).

Problemløsing blir altså ikke betraktet som et mål i seg selv, men som et middel for å nå målet.
I andre perioder har problemløsing blitt betraktet som en ferdighet, der evnen til å løse spesielle problemer i matematikk ble oppøvet. Behavioristene mente at denne evnen hadde overføringsverdi og at det var mental trening.
I den senere tid har en sett på problemløsing i matematikk som hjertet av matematikken, (Halmos). Stanic og Kilpatrick (1988) ser på problemløsing som en kunst, (alle ref. i Schoenfeld 92)

I dag er begrepet problemløsing gjerne knyttet til det å eksperimentere, modellere, simulere, stille egne spørsmål ut fra de erfaringene en gjør og deretter ha tilstrekkelige kunnskaper til å besvare spørsmålene.

Det er i de siste 20 –30 årene blitt forsket spesielt på problemløsing i matematikk.
Det ser ut til å være enighet om fem aspekter ved kunnskapstilegnelsen, nemlig

[3] (National Research Counsel (1989): Everybody counts)

- Kunnskapsgrunnlaget
- Problemløsingsstrategier
- Metalæring, refleksjon og kontroll
- Tro og følelser
- Praksis

(Schoenfeld 1992)

2.2.5.1 Kunnskapsgrunnlaget

Kunnskapsgrunnlaget må være på plass med fakta og metoder. En har i de siste 25 år vært opptatt av hvordan hjernen fungerer og hvordan hukommelsen er organisert med langtidsminne og korttidsminne/arbeidshukommelse.
Vi er informasjonsbehandlere; vi lager symbolske representasjoner i hjernen. Men vi må vite hvilke informasjoner som er relevant i en matematisk situasjon. Vi må ha de nødvendige kunnskapene og vi må vite hvordan de skal brukes. Å forstå matematikk er å kunne bruke kunnskapen aktivt.

2.2.5.2 Problemløsingsstrategier

Problemløsingsstrategier (Heuristikk) må begynne med Polya. Han anbefaler å veilede studentene gjennom vanskelige problemer. Å løse et problem er en flerleddet prosess:

- å formulere problemet
- å analysere problemet og komme fram til en løsningsmetode
- å foreta nødvendige beregninger
- å vurdere framgangsmåte og resultater

(fra Veiledning til Mønsterplan for grunnskolen, 1987)

Polya har selv gitt anbefaling om å komme med analogier, hjelpestørrelser, bryte ned og sette sammen på ny, indusere, spesialisere, variere og arbeide baklengs ved problemløsing.
Synet på Polyas anbefalinger har vært relativt negativt, spesielt fram til 1980-årene. Grunnen er nok at prosessen er lite formalisert og vanskelige å bruke. Anbefalingene var beskrivende, men ga ingen detaljert oppskrift for hvordan en skulle gå fram. En må bruke ulike strategier ved løsing av problemene.
I dag kommer Polyas ideer inn i læreplanene. Å løse virkelighetsnære problemer kan være en krevende oppgave både for elever og lærere; for læreren mer krevende enn annen undervisningsform.

2.2.5.3 Metalæring

Metalæring vil altså si at en under læringsprosessen stadig er kritisk til det arbeidet som utføres. Dette er en egenskap som utvikles etter hvert som en blir eldre. En blir flinkere til å planlegge arbeidet, foreta prioriteringer og arbeide mer effektivt.
Schoenfeld gjør rede for en metode han har brukt for å få studentene til å bli mer bevisst sitt eget arbeid ved problemløsing i matematikk. Mens studentene arbeider, beveger han seg rundt i rommet og stiller disse spørsmålene:

- Hva holder du på med? (Kan du beskrive det presist?)
- Hvorfor gjør du det? (Hvordan passer det inn i løsningene?)

- Hvordan hjelper det deg? (Hva vil du gjøre med resultatet?)

Selv om studentene er ukomfortable med denne spørsmålsstillingen, fortsetter han med det for å skape en bevissthet til arbeidet de gjør, at de reflektere og kontrollerer det de gjør.

Metakunnskaper kan også være til hinder for ny læring; elevene bringer med seg holdninger, misoppfatninger som må bearbeides. Problemet er at det er vanskelig å finne ut hva den enkelte elev bringer med seg og hva som hindrer dem i å komme videre når læreren har en skoleklasse med 30 elever å forholde seg til. Forutsetningen for å kunne hjelpe den enkelte elev er at klassene blir mindre, for eksempel 15 elever.

2.2.5.4 Tro og følelser

Tidligere var det et skarpt skille mellom det kunnskapsmessige og det følelsesmessige ved all læring. I matematikk vet vi alle om de som hadde/har matematikkskrekk. Matematikk er assosiert med viten, sikkerhet, å få rett svar. Elevers erfaring fra klasserommet vil være med å skape følelser og holdninger til matematikk. Det som skjer i klasserommet er også påvirket av lærerens måte å opptre på. Elevers oppfatning av matematikk er referert av M. Lampert (1990) i American Education Research Journal (Schoenfeld, 1992).

- Matematiske problemer har ett og bare ett rett svar
- Det er bare en korrekt måte å løse et matematisk problem på - vanligvis den måten læreren nettopp har vist klassen
- Vanlige studenter kan ikke forvente å forstå matematikk; de må memorere det og anvende det de har lært mekanisk og uten å forstå det
- Matematikk er en ensom aktivitet, gjort av den enkelte i isolasjon
- Studenter som har forstått den matematikken de har studert, vil være i stand til å løse et tilsvarende problem på fem minutt eller mindre
- Den matematikk som læres i skolen har ingenting med den virkelige verden å gjøre
- Formelle bevis er irrelevant når en skal oppdage eller finne opp noe

For mange elever vil slike holdninger føre til at de gir opp etter kort tid dersom de ikke finner løsningen umiddelbart. De tror også at de kan lære matematikk mekanisk, uten forståelse. Som lærer er det vanskelig å få alle 30 i en klasse til å forstå at de må streve for å oppnå forståelse. Enten vil de ikke bruke den tiden som trengs, eller de har opparbeidet en holdning om at matematikk for dem er ubegripelig likevel, og at de må lære det mekanisk. En lærers holdning til miljøet for læring i klassen er av uvurderlig betydning.
Også samfunnets holdning til matematikkopplæringen er av stor betydning. Dette viser seg gjennom antall timer som er tildelt faget, gjennom læreplanene og vanskelighetsgraden av stoffet. Alle må få utfordringer, men å gi alle elever en passe utfordring krever mye av læreren.

Språk og kommunikasjon er viktig i matematikk som i andre fag. Vi vet at det som er klart formulert vanligvis også er forstått. Derfor er det viktig å bruke det matematiske språket i undervisningen, men selvsagt må det gis rom for elevenes egne formuleringer. En må hjelpe til med å bygge opp elevenes tro på seg selv.

2.2.5.5 Praksis

Hvordan kan en skape et klassemiljø som gir mulighet for kunnskapstilegnelse og spesielt til å løse problemer i matematikk? Det er selvsagt ikke enkle svar på disse spørsmålene, men det er viktig som lærer å være bevist på de punktene som er nevnt ovenfor og være åpen for det som skjer i klasserommet.

Anbefalinger som gis til lærerne fra ”the 1985 Mathematics Framework” (California State Department of Education, 1985) er som følger:

- Bruk problemløsings metoder når det er mulig, finn ut og eksperimenter sammen med elevene.
- Skap en klasseroms atmosfære der elevene føler seg komfortable med å prøve ut ideer.
- Inviter elevene til å forklare måten de tenker på i hvert trinn i problemløsings prosessen.
- Gi elevene tillatelse til å bruke ulike strategier for å løse et gitt problem og fortell at problemer ofte krever originale tilnærminger.
- Gi problemer som i sitt omfang og sin kompleksitet ligner virkelige situasjoner. Da vil de erfaringene elevene oppnår i klasserommet være overførbare.

Skal disse anbefalingene effektueres, må lærerne få en grundig etterutdanning. Videre er det nok nødvendig å endre hele kulturen i matematikkopplæringen. Da trengs det et støtteapparat for lærerne som i liten grad finnes i dag.

En annen ting som virker inn på det som skjer i matematikkundervisningen, i hvert fall i ungdomsskolen og i videregående skole, er hvordan kunnskaper i matematikk skal vurderes. Det er liten tvil om at eksamen i stor grad styrer undervisningen. Skal problemløsing i matematikk i skolen få en større plass, må også dette gjenspeiles i vurderingssituasjoner. Hvordan dette skal gjøres må en ha en grundig diskusjon på.

2.4 Oppsummering

Læring i matematikk, som i andre fag er en komplisert prosess; noen har evner til å bli gode i matematikk, andre i andre fag.
Det som gjør matematikk forskjellig fra andre fag, er fagets hierarkiske karakter som gjør at en brist ett sted kan føre til problemer senere. Matematikk krever konsentrasjon og nøyaktighet, mens samfunnet stadig karakteriseres av høyere tempo.

I dette kapitlet har jeg sett på teorier om hva det vil si å kunne matematikk.
Videre har jeg sett på hva som fremmer læring generelt, og i matematikk spesielt. Det har vært mye forsking på hvordan matematikk læres og forstås.
Polya var tidlig ute med at elevene måtte lære seg problemløsingsstrategier i matematikk, og at hvis en først hadde tilegnet seg slike strategier ville en kunne overføre disse til andre problemer.
Schoenfeld kom senere med andre elementer som virket inn på kunnskapstilegnelsen i matematikk: metalæring, tro og følelser samt praksis.
Dubinsky har satt fram en teori om hvordan læring skjer.

Et fellestrekk for at læring skal finne sted finner en igjen, nemlig ”konstruktivismen.”

Som sagt er det mange faktorer som virker inn på læringsprosessen, men jeg får si med Ausubel:

> *"Dersom jeg skulle redusere all læringspsykologi til bare et prinsipp, vil jeg si : Den mest betydningsfulle enkelt faktor som virker inn på læring , er det som eleven allerede vet. Konstanter dette og undervis i følge det"* (Orton,1992).
> (Min oversetting)

Kapittel 3. En analyse av Mønsterplan av 1987.

3.1 Innledning.

For å få en forståelse for hva en kan forvente av elever i videregående skole når det gjelder volumforståelse, må en se hvordan hovedemnet Måling og enheter med delemnet volum blir behandlet i læreplanen. Siden problemløsing er nytt i forhold til tidligere læreplaner og fordi jeg mener det er relevant i forhold til de oppgavene jeg vil se nærmere på i den kvalitative del av oppgaven (kap. 6), vil jeg også se nærmere på det.

Lov om grunnskolen fastsetter grunnlaget for skolens virksomhet. Paragraf 7 i loven gir nærmere utforming av de mål som er satt for skolen, fag- og timefordeling og undervisningsplaner for alle fag og klassetrinn, samt de områder læreplanen til vanlig skal omfatte.
Læreplanfeltet har nok en lang fortid, men en kort historie (Øzerk, 1999).
I den norske folkeskolen og senere grunnskolen, har man siden 1945 hatt fem viktige læreplandokumenter:

1) Normalplanen av 1939
2) Mønsterplanen av 1974
3) Mønsterplanen av 1987
4) Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen (L 97) og
5) Det samiske læreplanverket for den 10-årige grunnskolen (L 97) samisk.

For første gang fikk vi høsten 1993 en generell læreplan som er felles for hele skoleverket.

3.1.1 Hvorfor læreplaner?

Læreplanområdet har blitt styrket for arbeid i skolen i de senere år, og i de videregående skoler spesielt etter Reform 94. I grunnskolen har en nok over lengre tid arbeidet med læreplanen som et arbeidsdokument.
Jeg oppfatter læreplaner som et politisk og pedagogisk styringsinstrument som endres når politikerne ønsker å endre noe i samfunnet. Det er også et uttrykk for hvilke prioriteringer vi gjør i samfunnet. Læreplanen gjenspeiler samfunnets kulturelle, verdimessige og ideologiske prioriteringer.
Kanskje er det noe i utsagnet om at samfunnets problemer blir skolens læreplan. Aldri før har samfunnsendringene vært så store, spesielt for barn og ungdom, og skolen har stadig nye utfordringer.
Det er lang avstand fra læreplanen til undervisningen; fra ideenes læreplan til den formelle læreplan, videre til den oppfattede læreplan og til den blir gjort gjeldende i klasserommet. Den egentlige læreplan er på mange måter det som skjer i klasserommet. Siden M 74 har det vært påkrevd å analysere læreplanen på den enkelte skole og dette ble spesielt nødvendig ved innføring av M 87, da det var krav om lokalt læreplanarbeid.

3.2 Læreplanutviklingen i Norge siden 1939

Normalplanen av 1939, heretter (N 39), var en undervisningsplan som skulle gjelde hele landet. Riktignok var det to læreplandokumenter, en for landsfolkeskolen og en for byfolkeskolen. Tidligere var det veiledende planer for den enkelte kommune.
Utgangspunktet for N 39 var den progressive pedagogiske bevegelse i de forente stater i begynnelsen av det 20. århundre.
Det var to prinsipper som skulle gjennomsyre enhetsskoletenkingen:

- minstekrav som skulle være bindende for alle skoler, og
- arbeidsskoleprinsippet.

De to prinsippene var motstridende. Øzerk sier at:

> *"planen på det formelle nivået forsøkte å kombinere en tradisjonalistisk, kunnskapssentrert, kultur - arv sentrert rasjonell læreplantenkning med en progressivistisk, erfaringsorientert og elevsentrert læreplantenkning der en henholdsvis tok sikte på det kunnskapsrike og det arbeidende og skapende mennesket".*

Det viste seg også at det var vanskelig å gjennomføre de motstridende prinsippene, og tradisjoner vant nok i stor grad over progressiv læreplantenkning.

Mønsterplan for Grunnskolen (M 74) gjorde slutt på Normalplanens 35-årige liv. M 74 er den første formelle læreplan for den 9-årige grunnskolen. Forsøksrådet for skoleverket ble opprettet i 1954, og utarbeidet en utførlig *"Læreplan for forsøk med 9-årig skole."*
Dette arbeidet ble nærmest som et tillegg til N 39.
Grunnskoleloven av 1969 og innføring av 9-årig grunnskole med rett og plikt til 9-årig grunnskoleopplæring gjorde det nødvendig med en læreplanreform, en innholdsreform som skulle erstatte N 39. Det ble laget et læreplandokument for den nye 9-årige grunnskolen. Dette dokumentet har fått stor oppmerksomhet og åpen kritikk fra forskermiljøet. Pedagogen Hans Tangerud mente at M 74 bekjente seg til flere uforenlige ideologier. Utsagn i M 74 er autoritære, hierarkiske tankemodeller der man legger stor vekt på styring ovenfra, samtidig som det også finnes en liberalistisk tankemodell.
M 74 har ikke noe minstekravprinsipp, men er ment å være en ren retningsgivende rammeplan. Den operere imidlertid med veiledende årsplaner for obligatoriske fag, en del valgfag og for obligatoriske emner.
De veiledende årsplaner var ment å være et forbilde, et forslag for skolestyrene som hadde ansvaret for planene i sin kommune. I de fleste kommuner ble planen vedtatt, slik den var utformet sentralt.
M 74 er en *"både – og"* læreplan. Den gir til kjenne at den ønsker å føre de reformpedagogiske perspektivene videre samtidig som den beholder dannelsesidealet i N 39. En ønsker å ta vare på det allmenndannete, kunnskapsrike menneske samtidig som man forsøker å styrke idealet om det samarbeidende, arbeidende, skapende og miljøbevisste menneske.

Mønsterplan av 1987 (M 87) er en revisjon av M 74. I forordet til M 87 står det at planen fører videre bærende prinsipper i M 74, men uten å si eksplisitt hvilke prinsipper som føres videre. En må anta at det siktes til lokalt utviklingsarbeid, tverrfaglig undervisning og tilpasset opplæring.

Det er delte meninger om M 87 er en revisjon av M 74, men på denne måten gikk i hver fall den politiske behandlingsprosessen greitt. Mønsterplanen angir forpliktende rammer for arbeidet i skolen, og presenterer felles lærestoff som alle elever skal arbeide med etter sine forutsetninger. Den enkelte skole skal bearbeide, utfylle og konkretisere det angitte lærestoffet som er oppført som hovedemner og delemner. De lokale læreplanene skal være bindeledd mellom mønsterplanen og arbeidsplanene for den enkelte lærer.

Mønsterplanens intensjoner er gode, men urealistiske når de legger opp til at hver skole skal lage sin egen lokale læreplan, og når det i stor grad overlates til den enkelte lærer å velge ut fagstoff uten klare retningslinjer i forpliktende læreplaner.
Dette utsagnet kan også relateres til OECD-rapportens (1988) betraktninger om det demokratiske og desentraliserte norske skoleverket, og problemet med å ha oversikt over hva som foregår ved landets skoler og ønsket om å sikre et likeverdig skoletilbud i rammen av enhetsskolen (Hovdenak 2000).

M 87 er i dag etterfulgt av Læreplan av 1997 for den 10-årige grunnskolen. OECD-rapporten stilte altså spørsmål ved styring og kontroll av det som skjedde i skolen. Kirke, Utdanning og Forskningsdepartementet, KUF, hadde nok en lav styringsprofil og liten innflytelse i utdanningssektoren. Dette er noe av begrunnelsen for målstyringen i utdannelsessektoren som for skoleverket har betydd innføring av Reform 94 og Læreplan 97.

3.2.1 Mønsterplanen av 1987

M 87 inneholder en generell del som gir de overordnede mål samt retningslinjer for skolens totale virksomhet. I fagplandelen er målene konkretisert for fag og fagområder.
Lærestoffet er presentert i treårsperioder: 1.-3.klasse, 4.-6.klasse og 7.-9.klasse.
Som sagt tidligere er M 87 en rammeplan som angir forpliktende rammer for arbeidet i skolen.
Lærestoffet er inndelt i hovedemner som er felles for alle elever etter den enkeltes forutsetninger. Delemnene er en nærmere konkretisering av hovedemnene.
Mønsterplanen forutsetter at den enkelte skole bearbeider, utfyller og konkretiserer det angitte lærestoffet.
I fagene norsk, engelsk og matematikk er det gitt ut veiledende årsplaner til mønsterplanen. Dette er ment å være et hjelpemiddel for lærerne innenfor de rammene mønsterplanen trekker opp.
I veiledningsheftet i matematikk tas alle hovedemnene opp. Det gis metodiske råd, forslag til læremidler, råd i forbindelse med tilpasset opplæring og tverrfaglig samarbeid, forslag til arbeidsmåter og prosjektopplegg.

3.3 Kriterier for valg av stoff

Når en skal analysere en læreplan, må en studere de overordnende prinsipper for valg av stoff. Disse er generelle og overordnet det enkelte fag. I M 87 ligger følgende hovedkriterier til grunn:

1) Grunnleggende kunnskaper og ferdigheter
2) Levende - gjøring av kulturarven

3) Praktisk allmennorientering
4) Fellesskap og framtid
5) Allsidig personlighetsutvikling
(Mønsterplan for grunnskolen M 87 s.42)

Kriteriene er allsidige og sammensatte som de vel må være når de skal gi uttrykk for viktige kunnskaper, ferdigheter og holdninger som skolen skal ta sikte på å utvikle.
Kriteriene blir så utdypet og i formuleringene finner en utsagn som kan knyttes til de enkelte fag og til emner.

Når det gjelder fagplanene for de enkelte fag, er de i stor grad bygd opp over den samme lesten. Det er en begrunnelse for faget som skolefag, det er stilt opp generelle mål for faget og det er litt generelt prat om lærestoff og progresjon, om arbeidsmåter og læremidler. Deretter kommer lærestoffet som er ordnet i hovedemner og delemner.
Dersom læreren kun skulle forholde seg til M 87 (uten veiledningsheftet i matematikk), ville det vært et magert utgangspunkt. Faget matematikk er tildelt 9 sider, og der skal læreplanen fra 1. til 9. klasse presenteres.
Med et slikt utgangspunkt vil det være lærernes erfaringer og lærebokforfatternes tolking av fagplanen som styrer undervisningen.

3.3.1 Stoffutvalget i M 87 i matematikk

Begrunnelsen for matematikk som skolefag er at faget er et nødvendig redskap innenfor ulike områder av samfunnsliv, teknikk og vitenskap. Videre sies det at matematisk kunnskap er en del av vår kultur. Presis informasjon kan gis ved hjelp av matematikk, men da kreves det matematisk innsikt og viten hos mottakeren. Kunnskaper og ferdigheter i matematikk trengs for å kunne løse mange oppgaver i dagliglivet, og for å kunne ivareta personlige interesser og gjøremål.
Denne generelle begrunnelsen for faget og målene som er satt opp for undervisningen i matematikk, stemmer overens med kriteriene for valg av stoff. Likevel gir ikke valget av emner i fagplanen oss noen idé om hvorfor akkurat disse emnene er valgt og ikke andre.
Ragnar Solvang (1992) viser til tre ulike typer mål som brukes i fagplanene i matematikk:

1) Direktiver for oppstilling av emner i en fagplan
2) Generelle utsagn om fagets mål i relasjon til fagets egenverdi og nytteverdi
3) Prosjektorientert (eller ideorienterte) mål

Det kan diskuteres om målene for matematikk i M 87 er av type 1) eller 2).
Som sagt sies det lite om hvorfor følgende emner er listet opp, men i målene for faget matematikk forsøker en å begrunne fagets posisjon ved generelle utsagn om fagets mål i relasjon til egenverdi og nytteverdi.

Følgende hovedemner er satt opp:

1) Problemløsning
2) Tall
3) Tallregning
4) Måling og enheter
5) Prosent

6) Geometri
7) Statistikk
8) Personlig økonomi og samfunnsøkonomi
9) Algebra og funksjonslære
10) Datalære

Et av målene i M 87 er ”innsikt i grunnleggende ferdigheter og metoder i matematikk”. Som en konsekvens av dette, er problemløsing kommet inn som et hovedemne. Videre er det et mål som sier at ”elevene skal øves opp til å tenke logisk”. Problemløsing er også i samsvar med dette målet.

3.3.1.1 Måling og enheter

Måling og enheter er det hovedemnet i M 87 de foreliggende diagnostiske oppgavene tar sitt utgangspunkt i.
Læreplanen sier noe om nødvendigheten av å ha kjennskap til hvilke mål og enheter som brukes. Elevene ”skal arbeide med forskjellige måter å måle på og øve seg i å velge passende enheter”. Det blir presisert at innlæring og øving bør skje på tvers av faggrenser, siden kunnskap om måling og enheter har betydning for arbeid med andre fag.
Hvilke målinger en skal foreta i de ulike tre - års periodene, hvilke enheter som skal innføres og hva man skal arbeide med, blir så listet opp.

Mønsterplanen viser altså hvilke rammer en skal arbeide innenfor i hovedemnet, men den gir ingen ideer om hvordan en skal arbeide utover det som generelt er sagt om arbeidsmåter i matematikk. Der finner en formuleringer som:

> *”Lærestoffet kan introduseres ved at elevene først undersøker og eksperimenterer… ”*
>
> *”…og/eller ved at læreren viser og forklarer”*
>
> *”Det bør brukes et enkelt og lettfattelig språk……”*
>
> *”Elevene bør oppmuntres til å forklare hvordan tenker når de løser oppgaver…*
> *……må det være hyppige samtaler og diskusjoner i samlet klasse eller i smågrupper”*
> *osv.*

(M 87 s.195)

3.3.1.2 Volum

Måling av volum er foreslått i M 87 i den første treårs perioden av opplæringen. Fra 4.-6. klasse skal elevene både måle og beregne volum, mens de i 7.-9. klasse skal arbeide med oppgaver med enheter for lengde, flate, volum, masse og tetthet.
De vanligste enheter for lengde, masse og volum innføres i den første tre års periode, mens det i neste tre års periode skal arbeides med omgjøring av enheter.
Man kan fundere over at ikke areal er tatt med i første periode, når masse og volum er tatt med.
Nå er jo planen en rammeplan, og det er selvsagt glidende overganger hele tiden mellom hvilke tema som tas opp gjennom opplæringen.
En ser at Måling og enheter er gjennomgående tema i hele grunnskolen, men alt er presentert i stikkordsform.

3.3.1.3 Problemløsing

I M 87 er problemløsing et hovedemne i fagplanen i matematikk. Sitater fra M 87:

> *”…..Ved at elevene får trening i selv å finne og formulere oppgaver, kan problemløsing motivere dem til å ta i bruk matematikk som redskap og stimulere deres evne til kreativ tenkning….”*

> ”…. *Overslagsregning inngår som et naturlig ledd i problemløsingsprosessen…..”*

> *”….De må kunne avgjøre om det resultat de er kommet fram til, er rimelig, og vurdere…”*

En finner generelle utsagn som kan overføres til alle mål i mønsterplanen. Det første utsagnet er en generell formulering, mens de to siste er arbeidsmåter som alltid har blitt anvendt i matematikkopplæringen.

3.4 Veiledningsheftet – en hjelp for læreren.

3.4.1 Måling og enheter - volum

I veiledningsheftet for matematikk, et hefte som skal være til hjelp for læreren i hans arbeid, gis det begrunnelse for hovedemnet Måling og enheter. Hovedhensikten er å gi elevene kunnskaper som vil ha betydning for deres arbeid i matematikk, i andre fag og i deres daglige virke. (Veiledende årsplaner Matematikk, 1987).
Veiledningsheftet gir anbefalinger om hva en skal arbeide med i tre perioder: 1.-3. klasse, 4.-6. klasse og fra 7.-9. klasse (Forslag til årsplaner). Det gir også anbefalinger til arbeidsmåter innen dette hovedemnet. For de to første periodene blir det lagt vekt på at en bør nytte praktiske aktiviteter slik at elevene får et så personlig forhold til måleenhetene som mulig. Det oppfordres også til tverrfaglig undervisning.

Når det gjelder hvilke læremidler som bør være tilgjengelig, står det

> *”..det er nødvendig med tilgang til forskjellige typer måleutstyr, spesielt måleutstyr som elevene møter til daglig.”*

Volumforståelse skal altså bygges opp ved å arbeide praktisk med målinger, og først senere skal de løse oppgaver ved hjelp av algoritmer.

3.4.2 Problemløsing

I veiledningsheftet hevdes det at problemløsing framstår som et spesielt emneområde. Mens andre hovedemner er mer avgrensede emneområder, omhandler problemløsing metoder det skal arbeides etter. Gjennom hovedemnet problemløsing søker en å legge vekt på arbeidet med algoritmer innenfor alle deler av matematikkfaget (s.13).

Problemløsingsprosessen blir gjennomgått. Det sies at mens det i dag blir lagt mest vekt på beregninger i oppgaver, må man i framtiden legge mer vekt på de andre leddene i prosessen:

- å formulere problemet
- å analysere problemet
- å komme fram til en løsningsmetode
- å vurdere framgangsmåter og resultater.

Det blir spesielt lagt vekt på at en skal konsentrere seg om problemer fra dagligliv og samfunn, og det gis en del eksempler på aktiviteter og situasjoner som kan brukes. Matematikk som redskap i tverrfaglige problemstillinger blir også poengtert.

Alt dette er vel og bra, men jeg tviler på om læreren får særlig ideer og inspirasjon til å finne fram til gode og passende problemer i matematikk som virkelig setter en prosess i gang.

Problemløsningsprosessen skal inn i alle deler av matematikkundervisningen i grunnskolen etter M 87. Intensjonen er god, men har lærerne en utdannelsesbakgrunn og en erfaringsverden som gjør dem i stand til å oppfylle kravet? Har lærerne en metodisk tilnærming til problemløsingsprosessen?
Det er vel tvilsomt om det er tilfelle for lærere flest, og da er det desto viktigere at de kan få inspirasjon og veiledning til å prøve ut ulike metoder. Veiledningsheftet i matematikk er vel ment å skulle tilføre lærerne en del ideer om hvordan de kan formidle en slik prosess i alle hovedemner og delemner. Veiledningsheftet inneholder en del generelle formuleringer, som:

> *"…..det må snakkes om framgangsmåter og løsningsmetoder…"*

> *"…..et sentralt ledd er å komme fram til en algoritme…."*

> *"….det må finnes oppgavesamling som både inneholder oppgaver i ferdighetstrening og problemløsning i et så stort utvalg at elevene kan få arbeide etter sine forutsetninger og i sitt tempo…."*

Går en inn og ser på forslag til årsplaner under de ulike hovedemnene, vil en enkelte steder finne begrepet problemløsing. Det er vel heller tvilsomt om læreren blir særlig klokere når det om arbeidsmåter for 4.-6.klasse står:

> *"I problemløsingsstykker med kompliserte tallstørrelser kan det være en fordel om elevene får bruke lommeregner"*

eller for 7.-9.klasse under regning med fortegnstall (s.44) står:

> *"Skal matematikk bli et redskap til å løse problemer, er evnen til å finne raske og fleksible løsninger viktigere enn at alt skal være skrevet på en matematisk korrekt form"*

Det område i matematikk som her i veiledningsheftet knyttes sterkest til problemløsingsprosessen, er geometri:

> *"Geometri er godt egnet for eksperimentering og utforsking – å stille opp hypoteser, utføre beregninger og tegne figur"*

Konstruksjonsoppgaver har tradisjonelt hatt sterke innslag av problemløsing hvor de ulike ledd i prosessen trekkes inn. Også i veiledningsheftet er dette tatt med:

- Formulere problemet – finne ut hva det spørres etter
- Analysere problemet – finne metode ved å bruke hjelpefigur
- Utføre konstruksjonen etter analysen
- Kontrollere konstruksjonen – formulere algoritmer

Noen hovedemner inneholder intet om problemløsingsprosessen; andre inneholder mer generelle formuleringer.
Det er foreslått at man har prosjektarbeid der problemstillinger fra naturfagene brukes for å illustrere problemløsingsprosessen.

3.5 Oppsummering.

Jeg har studert M 87, spesielt med tanke på matematikkfaget, for å se hvordan hovedemnene Måling og enheter med fokus på volum, og Problemløsing er ivaretatt både der og i veiledningsheftet for matematikk. I M 87 er alle hovedemner og delemner svært knapt formulert, og det er få råd til lærerne når de skal planlegge opplæringen. Etter en målformulering er det en leseplan som er en opplisting av emner som lærebøkene vil omfatte. Målene i matematikk er avledet av læreplanens generelle mål, og holdt i generelle vendinger.

Hovedemnene blir gjentatt i de tre periodene, mens delemnene endres fra å være av praktisk karakter til å bli mer teoretisk. M 87 er bygd opp i et såkalt spiralprinsipp der et emne tas opp på ny og utvides i takt med elevenes modning. Det er godt mulig at dette er et fornuftig prinsipp for hovedemnet Måling og enheter, mens det ikke er det for andre hovedemner. Da tenker jeg spesielt på temaet om funksjoner som har vist seg å være svært vanskelig for mange.

Vi må se i øynene at læreplaner opp gjennom årene har blitt lest og brukt av lærerne i svært ulik grad. I hvilken grad det har vært utarbeidet lokale læreplaner på den enkelte skole, vet jeg ikke, men jeg stiller meg tvilende til at det har vært særlig utbredt.

Statistikken[4] viser at 73 % av lærere som underviser i matematikk i norsk grunnskole hadde 10 vekttall eller mindre i faget. For ungdomsskolens vedkommende var tilsvarende tall 52 %. Mange har hevdet, også pedagoger, at det viktigste i opplæringen er pedagogikk. Er man en dyktig pedagog, er det ikke så farlig med den faglige bakgrunnen. Jeg mener dette er en meget betenkelig innstilling til faglig kompetanse blant lærerne.

Det er viktig med faglig kompetanse blant lærere i matematikk slik at de kan beherske de faglige utfordringene en lærer står overfor. Det er også viktig å kunne tolke en læreplan og kunne variere arbeidsmåtene slik at den enkelte elev får forståelse for alle hovedemnene i matematikk. Men også læreren trenger inspirasjon og erfaring i bruk av ulike arbeidsmetoder. Det synes jeg ikke læreplanen i matematikk, ei heller veiledningsheftet bidrar med.

George Polya (1992) sier at det i matematikk er det viktig å formidle ”know - how ”. Med det mente han at elevene måtte lære seg å løse problemer, ikke bare løse rutineoppgaver, men problemer som krever noen grad av selvstendighet, originalitet, kreativitet og vurderingsevne.

[4]http://www.ssb.no/us/utg/9920/7-2t.txt

Han mente den gang at utdanningen av matematikklærerne måtte ta opp problemløsings prosessen.
Læreplan for matematikk i M 87, samt veiledningsheftet i matematikk, vil gi lærerne i matematikk en viss hjelp og en bevisstgjøring. Er det en samarbeidskultur i matematikk ved en skole, kan det komme mye bra ut av det. Likevel er jeg redd for at problemløsing i matematikk har vært et diffust begrep og at elevene, i stor grad, har løst rutineoppgaver.

M 87 gir anbefaling om arbeidsmetoder i emnet Måling og enheter. Det blir opp til lærere og lærebokforfattere å formulere problemer som engasjerer og stimulerer elevene innen dette emnet. I realiteten blir nok mye av opplæringen i matematikk styrt av lærebøker og eksamen.

Kapittel 4. Analyse av et læreverk Analyse av Avgangsprøver i grunnskolen

4.1 Innledning

Etter å ha studert fagplan i matematikk i mønsterplanen av 1987 og veiledningsheftet som er gitt ut i tilknytting til faget, vil det være interessant å se hvordan læreplanens intensjoner er fulgt opp i et læreverk. Likeledes vil det være av interesse å se på "Avgangsprøver for grunnskolen" etter at mønsterplanen ble innført, spesielt hva angår Måling og enheter, volum og problemløsing.

Siden dette KIM - prosjektet er en undersøkelse blant elever i grunnkurs i videregående skole, har jeg valt å konsentrere meg om matematikkopplæringen for grunnskolen, fra 7.-9. klasse. Jeg har i liten grad tatt for meg lærebøker i barneskolen.

Jeg har tatt for meg *"min matematikk"* av Øivind Westbye, utgitt ved NKS forlaget. Læreverket består for hvert trinn av en allmennbok med tekst og eksempler, øvinger, oppsummeringer og viktige regler, samt hoderegning. Tilvalgsboka inneholder flere oppgaver av ulik vanskelighetsgrad. I tillegg finnes det en oppgavesamling med repetisjon for 7. – 9. klasse. Det er også gitt ut en lærerveiledning.

4.2 Måling og enheter i læreverket – volum

M 87 er en rammeplan, men rammeplanen er forpliktende selv om den ikke gir en detaljert oversikt over lærestoffet. Hovedemnet måling og enheter viser arbeidsområdet for de tre treårs - periodene.

For 1.-3. klasse starter emnet måling og enheter med måling av lengde, masse , volum og de vanligste enhetene tas med. Myntenhetene kroner og ører, klokken og kalenderen tas også opp i denne perioden.

For 4.-6. klasse fortsetter en med de samme emnene, men innfører også sammensatte enheter. Målestokk, regning med norske penger og de vanligste utenlandske myntenheter og omgjøring av enheter innføres også.

Læreplanen for 7.-9. klasse inneholder også disse emnene. Tetthet og måleusikkerhet innføres nå.

Læreverket *"min matematikk"* har ikke et eget kapittel om emnet Måling og enheter i bøkene for 7. klasse. Måling og enheter er en naturlig del av kapitlene i geometri der lengde og areal av ulike figurer har sin plass. Enheter og omgjøring av enheter tas opp. I romgeometrien kommer volumet av prismer, terninger og sylindere inn, samt de enhetene som det er naturlig å bruke. Bøkene inneholder mange figurer for å illustrere hvordan man tegner et prisme/ en terning og hvordan de kan bygges opp av enhetsterninger. Både læreboka og tilvalgsboka for dette klassetrinnet inneholder mange gode figurer. Elever som er visuelle vil lett kunne få en god forståelse for volum og overflate ved hjelp av læreboka og så arbeide med gode oppgaver. Oppgavene i bøkene er stort sett *oppskrifts - oppgaver* som de vel må være for å få en rutine i arbeidet med å beregne arealer og volumer på dette klassetrinnet.

Bøkene for 8. klasse har et eget kapittel som heter Måling og enheter. Lengde-, areal-, og volumenheter repeteres. Det samme er tilfelle for areal og omkrets av ulike geometriske figurer, og overflate og volum av romgeometriske figurer. Litersystemet og enheter for masse og vekt stilles opp på en oversiktlig måte. Tetthet innføres og sammenhengen mellom vei, fart og tid. Omgjøring av enheter tillegges stor vekt på dette trinnet.
For mange elever vil sammenhengen mellom tetthet, masse og volum og sammenhengen mellom vei, fart og tid være problematisk. Mange prøver å finne en måte å memorere sammenhengen på fordi de ikke har en god forståelse av hva enhetene betyr verken i sammenheng eller hver for seg. Oppgavene i dette stoffet blir da problemer.

Dersom en ser på figurene i bøkene for 8. klasse, merker en seg mange figurer av romlige legemer, men det er kun sylinderen som er *klippet opp og brettet u*t slik at elevene kan se flatene den er bygd opp av.

I bøkene for 9. klasse finner en Måling og enheter i kapitlet om Geometri. Omkrets og areal av en sirkelsektor, vinkler og sider i trekanter, målestokk, formlikhet og rettvinklede trekanter, areal og omkrets av ulike firkanter er med her. Overflate og volum av romgeometriske figurer repeteres. Heller ikke på dette klassetrinnet er overflaten av disse legemene godt illustrert. For å vise overflaten av et prisme, går en ut fra en perspektivtegning og markerer topp, bunn og sideflater.

Mange av oppgavene som gis er *regn ut* oppgaver når tilstrekkelig opplysninger er gitt. En del oppgaver er sammensatte oppgaver som likevel er greie oppgaver dersom en har de kunnskapene som må til for å løse dem. Det finnes også fordypningsoppgaver som krever pågangsmot og en viss porsjon av kreativitet og fantasi.

Ettersom elevene i 9. klasse bare har tre uketimer til disposisjon i matematikk, må det være et problem å få tiden til å strekke til for å få en helhetlig forståelse og sammenheng mellom emnene i matematikk.

4.3 Problemløsing i læreverket

Tidlig i læreboka for 7.klasse kommer et kapittel om problemløsing. I starten sammenlignes to oppgaver: a) en multiplikasjonsoppgave og b) en tekstoppgave som framstilles som et problem. Forfatteren sier at for å løse oppgave b) må eleven

- forstå problemet
- lage en plan for hvordan du skal komme fram til en løsning
- gjennomføre planen
- kontrollere resultatet

Deretter forklarer forfatteren på en enkel måte hva disse fire punktene betyr.

Det settes opp et eksempler der en nøye går igjennom de fire punktene over. Deretter er det noen oppgaver der elevene får i oppgave å

1) skrive hva som er problemet i oppgaven
2) lage en plan, og skrive den ned
3) sette opp regnestykket og regne ut
4) Kontrollere svaret før fasiten brukes

Dette er helt i samsvar med Polyas framstilling for å løse et problem.

Prøving og feiling – eksperimentering er også tatt med her.
Enkelte problemer kan ikke løses ved å bruke bestemte regneregler, og elevene oppfordres til å prøve seg fram for å se om det er mulig å finne et system eller å finne en sammenheng.

Så langt er intensjonen i læreplanen fulgt. Men har problemløsingsprosessen gjennomsyret hele læreplanen slik som intensjonen var?

For meg virker det som lista er lagt høyt i læreplanen. I grunnskolen er det svært viktig at elevene får en god forståelse av den matematikken som skal læres. Det må også innarbeides gode arbeidsvaner og rutiner slik at mye av arbeidet kan automatiseres. Til det trengs det øvelse i å håndtere oppstilte oppgaver, men også å kunne tolke og praktisere tekstoppgaver. Drill er et ord som brukes i positiv og negativ betydning. Drill er positivt i det den gir trening i å regne, men det er negativt når det tar overhånd. Det er sikkert ikke lett å finne en balanse når hele elevmassen skal gjennom den samme stoffmengden, riktignok på en måte som passer den enkelte.

I allmennboka for 8.klasse finner en igjen emnet problemløsing i kapittel 9. De fire punktene en bør bruke for å løse et problem i matematikk, gjentas på dette klassetrinnet. I tillegg brukes begrepet algoritme som settes i sammenheng med de fire regningsartene. Så følger en del oppgaver hvor elevene blir oppfordret til å følge framgangsmåten som er foreslått.

Eksempel:

Hvor stort blir arealet av et kvadrat dersom sidene øker til det dobbelte?

a) Skriv ned punkt for punkt hvordan du vil gå fram for å løse oppgaven. Hvilke algoritmer inngår i planen?
b) Regn ut etter planen. Skriv tekst som viser hvordan du tenker.
c) Kontroller resultatet.

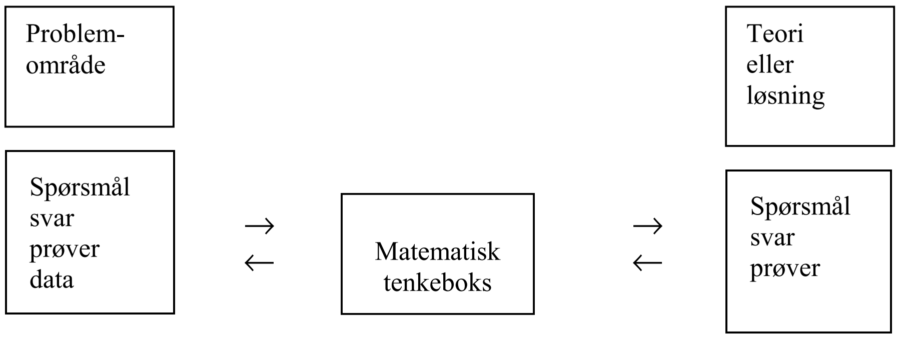
Jeg synes forfatteren legger opp til en fornuftig måte å innarbeide gode arbeidsvaner i matematikk på. Arbeidsmåten er tidkrevende, men meningen er nok at når elevene har gjennomført metoden på en del eksempler, vil en automatisk tenke i samme bane selv om en ikke formulerer alt skriftlig. I hvilken grad læreren i matematikk har greid å gjennomføre denne prosessen vites dog ikke.

I etterfølgende eksempel legger forfatteren inn noen tilleggsspørsmål i planen for å løse problemer.
Vedrørende punktene a), b) og c):

1) Kan det hjelpe på forståelsen at en stiller spørsmål om en kjenner igjen problemstillingen. Har vi løst lignende oppgaver før? Finnes det tilsvarende oppgaver som er enklere å løse?
2) Så følger en skriftlig og logisk oppbygd plan
3) En gjennomfører utregningen og skriver tekst for å vise tanken som ligger bak.
4) En kontrollerer svaret. Er svaret rimelig i forhold til de tallene og opplysningene som er gitt? Gjør et overslag.

Eksperimentering og systematisering tas også opp på ny i allmennboka i 8.klasse. Det blir nærmere forklart at det finnes ingen entydig måte å gå fram på.
" Du må måle, prøve med tall, lage system i tallene og forsøke å finne en teori eller en løsning"

Arbeidsmåten illustreres slik:



Fra problemområdet innhenter vi opplysninger, data.
Disse bearbeider vi i tenkeboksen. Der kan vi systematisere dataene, lage tabeller, figurer, modeller og se om vi kan finne en sammenheng, finne en teori eller løsning, (Westbye, s. 361).

Dette er blant de arbeidsmåter som læreplanen i M 87 anbefaler.

I Allmennboka for 9.klasse inneholder Kapittel 4 emnet Problemløsing.
Nå går forfatteren enda grundigere til verks. I første omgang skiller han mellom *oppskriftsoppgaver* og *problemer.*

De fire trinnene til løsning har nå en grundig spesifisering av spørsmål som kan stilles underveis i løsningsprosessen av problemer. Det er neppe meningen at en skal stille alle spørsmålene ved alle problemer, men innarbeide en rutine på ulike problemstillinger som virker fornuftig. Elevene må ha strategier for å løse problemer i matematikk. Trening og erfaring hjelper godt, men det kreves også kreativitet og fantasi,(s.106).
Det er en del forslag til hvordan en kan arbeide på ulike måter for å finne en løsning på problemet:

- Arbeide baklengs
- Prøving, feiling og systematisk eksperimentering
- Tenke seg problemet løst
- Let etter et mønster
- Del opp problemet

- Bruk matematikkspråket
- Konkretiser problemet
- Løs et enklere problem
- Beregn en størrelse på to måter

Det vises en del eksempler på hvordan en kan arbeide. Det vises også et problem som kan løses på fem forskjellige måter.
Problemet er som følger:

> **I 1979 var Peter 8 år, og hans far var 31 år. I hvilket år blir Peters far dobbelt så gammel som Peter?**

Deretter vises de fem løsningsmetodene: 1) ved å sette opp en ligning, 2) ved systematisk eksperimentering, 3) ved å bruke tall-linje, 4) ved å se på aldersforskjellen og deretter sette opp en ligning og 5) ved å arbeide baklengs.

Samarbeid mellom elevene blir også framhevet som en gunstig arbeidsmåte. Elever har gjerne ulike innfallsvinkler på et problem som kan være fruktbart.
Tilvalgsboka for 9.klasse har et eget kapittel med oppgaver i problemløsing. Her er det en del fordypningsoppgaver som krever både kreativitet og fantasi.

I Oppgavesamling med repetisjon for 7.-9. klasse har en også en gjennomgang av problemløsingsprosessen. Ett punkt er kommet i tillegg, nemlig at en skal gjette og sjekke og prøve seg fram.

Forfatteren gjør en vurdering av denne måten å arbeide på. Den kan være tungvindt og tar lang tid. Han anbefaler å sette gjetningene opp systematisk slik at det ikke bare blir prøving og feiling.

4.4 Oppsummering

Siden de diagnostiske oppgavene som denne hovedoppgaven tar for seg, bygger på elevenes kunnskaper om måling og enheter generelt og volumforståelse spesielt, er det også naturlig å se på dette emnet i læreverket jeg har studert.
Læreverket ”*min matematikk*” har presentert begrepene etter hvert som elevenes evne til å forstå har økt. Sett utenfra er presentasjonen av de ulike enhetene pedagogisk lagt opp og ifølge Piagets stadieteori. I en vanlig skoleklasse vil imidlertid elevene være på ulike nivå til enhver tid. Det blir opp til læreren å lage undervisningsopplegg som gir arbeid og utfordringer til den enkelte elev.

I M 87 (s.195) er arbeidsmåtene i matematikk beskrevet slik:

- elevene skal først undersøke og eksperimentere
- læreren viser og forklarer

Jeg vil tro at undersøking og eksperimentering er relativt lite brukt som arbeidsmåte i matematikkopplæringen i ungdomsskolen. Forhåpentlig har elevene arbeidet på denne måten i barneskolen.

For emnet Måling og enheter står det om læremidler:

- Elevene skal kjenne til måleinstrumenter
- Elevene skal arbeide med forskjellige måter å måle på og øve seg i å velge passende enheter.

Intensjonene i M 87 er gode og en får anta at elevene får gjøre sine egne erfaringer hjemme og på skolen slik at lærdommen blir internalisert. Å finne areal, volum, overflate, fart, tetthet osv. må ikke bare bli noe som en må kunne for å svare rett på matematikkoppgaver og som ikke har noe med dagliglivet å gjøre.

Det er mange hensyn som må tas når solid kunnskap skal bygges opp. Læreverket som brukes er bare et element, men det er et viktig element. Mange lærere baserer sine undervisnings-opplegg på lærebokas ideer.

Forfatteren av læreverket ”min matematikk” for 7.-9. klasse ser ut til å ha tatt læreplanens intensjon på alvor. Måling og enheter er lagt opp slik læreplanen gir anbefaling om. Om ikke problemløsingsprosessen gjennomsyrer læreverket, er det med som hovedemne og utdypet for elevene og lærerne på alle årstrinn i den grad forfatteren har funnet det nyttig og nødvendig. Det er også noen oppgaver, om ikke mange, som måler forståelse for volum og overflate, og som er spesielle.

Dersom elevene i opplæringen arbeider med å klippe opp og brette ut tredimensjonale legemer, vil de få en forståelse om hva som er rominnhold og hva som er overflate. Læreboka *”min matematikk”* viser kun utbrettingsfigurer av sylinderen. Jeg savner andre utbrettingsfigurer.

Allerede i læreboka for 7. klasse innføres litermål parallelt med kubikkmål. Det tror jeg lett kan føre til en forvirring på dette trinnet.

De ulike metodene som er foreslått brukt i problemløsingsprosessen i *”min matematikk”* finner en igjen i Mathematical Discovery - volum1,(Polya 1962). I dette verket finner en følgende sitater fra Rene Descartes i hans ”Rules for the Direction of the mind”:

> *“Each problem that I solved became a rule which served afterwards to solve other problems”*

og

> *“If I found any new truths in the sciences, I can say that they all follow from, or depend on, five or six principal problems which I succeeded in solving and which I regard as so many battles where the fortune of war was on my side”.*

Det første sitatet bruker Polya videre idet han sier at det kan være nyttig å klassifisere problemer. Har en funnet ut hva slags problem en har for seg, vil en med en gang prøve å finne ut hvordan en løser slike problemer. En vil lete etter et handlingsmønster, en prosedyre.

Polya sier i ”hint til lærerne og lærenes lærere”:

> *”En lærer som ikke har personlig erfaring med kreativt arbeid, kan neppe forventes å være i stand til å inspirere, lede, hjelpe, ja til og med å gjenkjenne elevenes kreative aktivitet”.*

(fritt oversatt av forfatteren).

4.5 Avgangsprøve i grunnskolen fra 1987 til 1999

4.5.1 Innledning

Avgangsprøven for grunnskolen i 1987 følger i store trekk M 87. Det hadde i lengre tid vært arbeidet med planene for den nye mønsterplanen og tidlig ble den omtalt som M 85. Jeg har derfor valgt å se på eksamensoppgavene i denne perioden. Jeg vil se om jeg kan si noe om oppgavene generelt og om volum- og problemløsingsoppgaver spesielt.

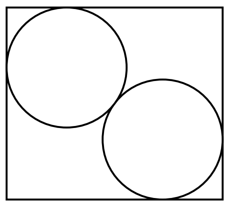
4.5.2 Avgangsprøven i 1987 og 1988

I disse to årene ble det til eksamen gitt to oppgavesett. Begge settene inneholdt samme delprøve 1 som besto av åtte oppgaver hvor en skulle svare på oppgavearket. Det var ikke lov å bruke lommeregner på denne delen. Her ble elevene prøvd i de fire regningsarter, i geometri, ligninger, målestokk, potenser og litt tallbehandling. Det var liten progresjon i oppgavene.

Delprøve 2 var i to utgaver. I den ene utgaven var det lov å bruke lommeregner, i den andre ikke. Lommeregner ble delt ut etter at delprøve 1 var innlevert. Fem eller seks av de åtte oppgavene var like for de to settene, mens to var forskjellige. Vanskelighetsgraden var nok noe større for de som hadde lov å bruke lommeregner. I denne delprøven var det mer tekst i oppgavene. Prøven inneholder et tverrsnitt av det som er naturlig å forvente på dette årstrinnet og for mange elever er tekstoppgavene i seg selv problemoppgaver. Oppgavene skulle føres på eget ark.

I 1987 skilte denne oppgaven seg ut ved at den måler volumforståelse og samtidig er en problemsløsningsoppgave:

En fabrikk lager sylinderformede beholdere. De skal pakkes i esker med kvadratisk grunnflate. I hver eske skal det stå to beholdere som er vist på figuren. La radius i sylinderen være r. Finn sidekanten innvendig i esken uttrykt ved r.



Ved løsning av oppgaven er første forutsetning at eleven "ser" at det er et tverrsnitt av en tredimensjonal situasjon og forstår problemet; vet hva som er betingelsene og hva en skal fram til. Oppgaven krever kreativitet, evnen til å prøve og feile ved å trekke hjelpelinjer. Kanskje har eleven vært borti et lignende problem tidligere?
Flere av trinnene i problemløsningsprosessen kan brukes dersom eleven er vant med å arbeide på denne måten.

I 1988 var avgangsprøven av samme art.
I delprøve 1 var oppgave 5 slik:

En eske har et volum på 2400 cm^3
Finn mål for lengde, bredde og høyde slik at volumet blir 2400 cm^3

Denne oppgaven skal også måle volumforståelse. Det finnes jo mange løsninger, men elevene må prøve seg fram for å finne tre tall som multiplisert med hverandre blir 2400 cm^3 .
Denne oppgaven er svært lik oppgave 16 i Diagnostiske oppgaver i måling og enheter som jeg vil se på senere.

4.5.3 Avgangsprøve i grunnskolen fra 1989 til 1999

Fra 1989 er avgangsprøven i grunnskolen kun i ett oppgavesett. På samme måte som i de to foregående år er det to delprøver, en uten lommeregner der en svarer på oppgavearket og en med lommeregner hvor elevene svarer på eget ark. Begge delprøvene deles ut samtidig for at elevene skal få oversikt over arbeidsmengden.
Antall oppgaver varierer litt, fra 10 til 14 på del 1 og fra 8 til 15 på del 2.

Delprøve 1 skal måle tallforståelse, regneferdighet og en del grunnleggende begreper.
Den skal inneholde oppstilt oppgaver og enkle tekstoppgaver. I noen oppgaver kreves det bare svar, mens det i relativt mange oppgaver er satt av plass til å vise framgangsmåte/ utregning. Progresjonen er relativ flat.

> *"Delprøve 2 har oppgaver av ulik vanskelighetsgrad for på den måten å motivere flest mulig av elevene til å arbeide seg igjennom settet. Delprøven stiller krav til kombinasjonsevne og kreativitet".*
> (Sitat fra avgangsprøven 1994).

Sensorenes vurdering av oppgavesettene er jevnt over at det er:

- god spredning i vanskelighetsgraden
- tilstrekkelig antall oppgaver også for svake elever
- oppgaver som fungerer bra
- mange oppgaver som elevene har prøvd seg på

Arbeidsmengden har imidlertid variert fra år til år. Spesielt blir avgangsprøven 1991 sett på som arbeidskrevende. Den inneholdt 14 oppgaver i del 1.

Personlig har jeg inntrykk av at oppgavene ble mer spennende fra og med 1989. Der er islett av oppgaver hvor elevene må prøve og feile, oppgaver der de må stille opp ligninger, oppgaver der det ikke kan brukes faste algoritmer, der er åpne oppgaver og problemløsnings-oppgaver. En del av oppgavene er virkelighetsnære idet det hentes opplysninger til oppgavene fra samfunnsforhold, fra værforhold i landet osv.

Fra 1997 er det ny *lay-out* på avgangsprøven. Det er ført opp poeng som gis på den enkelte oppgaven. Oppgavetekstene er noe forandret i forhold til tidligere, og muligens vil noen av oppgavene oppfattes som enklere.

Det er få oppgaver som måler volumforståelse. I gjennomsnitt er det én i hvert eksamenssett. Det er volumoppgaver som er ganske sammensatte, og det kreves god innsikt og forståelse. Det er oppgavetyper jeg finner lite av i læreverket jeg har satt meg inn i.

Som sagt tidligere har Avgangsprøven for grunnskolen forandret seg i perioden fra 1987 til 1999. Flere av oppgavene er blitt mer *virkelighetsnære,* dvs. at det er laget problemer som er relevante i forhold til elevenes daglige liv. Jeg vil ikke si at oppgavene er blitt vanskeligere selv om det er flere oppgaver som krever initiativ og fantasi. Oppgavene er blitt mer spennende, men mange oppgaver krever god matematisk forståelse. Prøvene er utstyrt med mange illustrasjoner som gjør hele oppgavesettet mer innbydende.
Dersom en ser etter virkelige nøtter, er det lite av det. Men det er heller ikke nødvendig for å teste matematikk-kunnskaper på dette nivået. Det er likevel nok av utfordringer både for den svake og den flinke elev i matematikk.

4.6 Oppsummering

Jeg har sett på *"Avgangsprøven for grunnskolen"* i den perioden M 87 har eksistert i norsk skole. Spesielt har jeg sett på om oppgavene som er gitt er i samsvar med intensjonen i mønsterplanen i hovedemnene Måling og enheter med volumforståelse og Problemløsing.

Jevnt over synes jeg at utvalget av oppgaver i avgangsprøvene er bra. Store deler av læreplanen, som elevene er undervist etter gjennom ni år, blir testet. Jeg mener at dersom elevene gjennomfører avgangsprøven med tilfredsstillende resultat, er det et uttrykk for at de både behersker faget i stor grad og at de også kan løse uvante oppgaver.

Jeg har imidlertid ikke kjennskap til eksamensresultatene for de elevene som ble vurdert, og kan dermed ikke trekke noen konklusjon om elevenes kunnskaper. Jeg kan imidlertid si noe om kunnskapsnivået i matematikk for de elevene jeg har tatt imot i videregående skole og som har fulgt M 87. Dette har vært *utvalgselever* og de har i stor grad hatt gode basiskunnskaper som det har vært fint å bygge videre på.

M 87 er en rammeplan med leseplan listet opp for periodene 1.-3., 4.-7. og 7.-9. klasse. Eksamensoppgavene er helt innenfor denne rammen.

Spørsmålet en kan stille seg er om opplæringen i matematikk har vært så grundig og variert at elevene har fått en god volumforståelse.
Det er mange ting som spiller inn: antall elever i gruppen, spredning i evne- og kunnskapsnivået til elevene, elevenes (og foreldrenes) motivasjon for å lære matematikk, lærernes kunnskaper, erfaringer og pedagogiske evner samt skolens rammevilkår og posisjon i samfunnet.

Kapittel 5. Diagnostiske oppgaver i måling og enheter.

1. Innledning.

I dette kapitlet vil jeg ta for meg undersøkelsen som ble foretatt i januar 2000 blant elever i videregående skoler, og se på utfallet av den.
Jeg hadde permisjon fra skolen hvor jeg arbeider skoleåret 1999/2000 for å selv å få påfyll av nye ideer og kunnskaper. Jeg tok kontakt med ILS og fikk tatt de nødvendige kursene for å komme i gang med en hovedoppgave i matematikk didaktikk. For å kunne bruke permisjonsåret maksimalt ble jeg veiledet til å gå inn i KIM - prosjektet hvor det allerede var en del materiale jeg kunne bruke.

Mål for KIM prosjektet var:

- Å utvikle diagnostiske tester i ulike områder i matematikk som et grunnlag for læringsaktiviteter
- Å gi en oversikt over alternative begreper i matematikk som norske elever har (3 –11) klasse
- Å utvikle undervisningsmateriale for lærere der alternative begreper oppstår.

Min deltagelse i prosjektet har vært å bidra med å utvikle en diagnostisk test for grunnkurs i videregående skole innen området Måling og enheter. Videre ble det min oppgave å vurdere utfallet av denne testen som ble gjennomført i januar 2000.
Gjennom arbeidet har jeg festet meg med oppgaver som elevene har hatt problemer med, enten ved at de ikke har besvart oppgaven eller har funnet alternative svar.

Siden hovedhensikten med prosjektet har vært å gi lærerne hjelp til å forstå elevenes begrepsforståelse i matematikk, har jeg sett nærmere på hvordan elevene løser volumoppgaver. Jeg har prøvd å finne noen forklaringer på elevenes problemer når de løser disse oppgavene. Kanskje kan dette hjelpe meg og andre lærere til å få en bedre innsikt i elevenes begrensede begreper eller i deres misoppfatninger.
For at jeg selv skulle få en bedre oversikt i hva som kan forventes av elevene i matematikk på dette nivå, har det vært nødvendig å studere læreplan, M 87, lærebøker og eksamensoppgaver.

5.2 Alternative begreper

Et av målene med KIM prosjektet var å gi en oversikt over norske elevers alternative begreper. Misoppfatninger er et annet ord som brukes innen fagdidaktikken i matematikk. Misoppfatningene er ikke tilfeldige feil elevene gjør når de ikke er tilstrekkelig oppmerksomme på det de holder på med. Misoppfatninger opptrer konsekvent over lang tid, og er sannsynligvis en normal utvikling for de fleste. Når noe nytt skal læres, prøver en alltid å knytte det nye til noe en allerede kan og kjenner igjen. En generaliserer ofte på sviktende grunnlag.
Andre ganger har en ufullstendige tanker om nye begreper fordi det en har lært tidligere, er begrenset lærdom. En kan også si at begrepene bare er delvis utviklet, noe som hindrer en i å

komme videre. Alternative begreper er svært robuste, og det er ofte vanskelig å endre de oppfatningene som elevene har tilegnet seg.
Misoppfatninger vil en nok finne innen alle emner i matematikkopplæringen. De diagnostiske oppgavene som er grunnlaget for denne hovedoppgaven, er altså et ledd i arbeidet med å avdekke hvilke misoppfatninger elever på grunnkurs i videregående skole har på området Måling og enheter generelt og volumforståelse spesielt
Gard Brekke (1995) skriver at diagnostiske prøver gjerne kan inneholde noen typer oppgaver som elevene ikke tidligere har arbeidet mye med. Elevene vil likevel oftest ha ideer om hvordan de skal angripe oppgavene for å finne et svar. Disse ideene kan læreren ta hensyn til i undervisningen.

5.3 Utarbeidelse av oppgavene.

Siden det allerede forelå diagnostiske oppgaver på området for 6. og 9. klasse, og fordi andre hadde vært inne i bildet for å utarbeide tilsvarende oppgaver for videregående skole, hadde jeg et utgangspunkt. Sammen med Gunnar Gjone og Guri Nortvedt ble det i løpet av høsten -99 satt sammen 24 diagnostiske oppgaver innen området Måling og enheter som utgjorde testen for grunnkurs i videregående skole. Noen av oppgavene går igjen fra grunnskolens oppgaver på området, mens andre er kommet til. Disse er prøvd ut på egen skole blant elever i studieretning for helse- og sosialfag for å se om oppgavene fungerte diagnostisk.

KIM - prosjektet har som mål å undersøke og beskrive norske elevers kunnskaper og ferdigheter innenfor noen utvalgte emner i matematikk. Siden jeg har arbeidet som matematikklærer i mange år både i ungdomsskolen og i videregående skole, synes jeg det er interessant å se nærmere på elevers problemer i matematikk. En vil som lærer stadig stille seg spørsmål om hvorfor elever gjør alle de feilene de gjør, hva som hindrer dem i læring, uten at en tar seg tid til å gå inn å prøve å finne ut av dette. Gjennom arbeidet med denne oppgaven, er jeg blitt mer bevisst på en del forhold som har betydning for læring i matematikk.

Problemet er å lage gode oppgaver som måler det en ønsker å måle – validiteten.

5.4 Validitet.

Spørsmålene en må stille seg er om oppgavene er relevante, om de er passe vanskelige for klassetrinnet, om de er interessante for elevene, om elevene får vist sin kreativitet og om de kan motiveres til å gjøre en innsats for å gjennomføre testen. Det er selvsagt vanskelig å gi sikre svar på disse spørsmålene, og utfordringen for meg blir jo å tolke testen på et vis som gir meg større innsikt. Dersom en ser nærmere på hovedemnet og detaljer i M 87 om Måling og enheter fra 1. – 9. klasse, ville jeg påstå at oppgavene ikke er for vanskelige. I mange oppgaver kan elevene også få vist kreativitet.

Nå har også flere personer vært inne i arbeidet med å lage de diagnostiske oppgavene i Måling og enheter, og det skulle vel borge for en viss grad av innholdsvaliditet.
Fra tidligere arbeid har to lærere som underviste henholdsvis på yrkes- og allmenne fag vært med i utprøving av oppgaver. Da hadde lærere mulighet for innspill, og elever fikk komme med sine reaksjoner og kommentarer under arbeidet (Nortvedt, 1998).

Når en test som dette blir presentert for en klasse, uten at den er i sammenheng med undervisningsopplegget, er det ikke sikkert at elevene vil gjøre sitt beste. Noen vil være negative til prosjektet, andre vil rase igjennom oppgavene for å bli ferdige, mens andre igjen vil arbeide så sent at de ikke kommer igjennom heftet innen den tid som er avsatt til formålet. Det siste punkt gir grunn for ikke å legge for stor vekt på resultatet av de siste oppgavene i heftet.

Oppgavene inneholder relativt lite tekst. Mange oppgaver er flervalgsoppgaver som skal besvares med avkryssing, mens det i noen oppgaver forventes at elevene skal skrive en tekst. Konstruksjonen av oppgavene er slik at en elev skulle kunne besvare dem selv om de skulle være lesesvake eller ha skrivevansker. Dette skulle bety at ”construct” validiteten er rimelig, (Lie og Caspersen, 1999).

5.5 Reliabilitet.

For at oppgavene skal være valide, så må de være reliable (Ary et al, 1996). Det betyr at resultatet av testen må være til å stole på, at testen kan brukes på et annet tidspunkt eller i en annen situasjon og gi tilsvarende resultat. Resultatet skal heller ikke påvirkes av utenforliggende faktorer. Det siste har jeg jo ingen garanti for, men jeg forventer at de elevene som har løst de diagnostiske oppgavene, er løst under gode forhold. Oppgavene er rimelig presist formulert og da kan en også vente å få presise svar. Det vil også øke reliabiliteten. Alle målinger av menneskelige kvalifikasjoner er imidlertid beheftet med feil. En må derfor regne med at også denne testen er det.

Ary et al setter opp en del punkter som øker reliabiliteten av målingene, blant annet nevnes det at reliabiliteten øker med spredningen av utvalget. Siden utvalget av elever er representativt og omfatter elever fra alle studieretninger, skulle reliabiliteten være akseptabel.

5.6 Koding.

Kodingen som er brukt på svaralternativene til oppgavene på området Måling og enheter for elever i videregående skole, er i stor grad identisk med den som er brukt for oppgavene til elever i 6. og 9. klasse i tidligere KIM - prosjekt (Nortvedt, 1998).
For å prøve ut forslag til koding på oppgavene i ”min” test, gikk jeg igjennom en del besvarelser etter at de var kommet inn for å se om de ulike svartypene stemte med ”mine” elevers svar. Jeg måtte selv få en forståelse av kodeprosessen, og i det se om kodingen virket rimelig.. Nye oppgaver ble kodet på tilsvarende måte etter å ha sett på en del resultater.

Å *arve* en kodebok har sine fordeler og ulemper.
For meg var det enkelt og tidsbesparende, og elevsvarene passet ganske godt inn i de kategoriene som var stilt opp.

Ulempen var at jeg ikke selv hadde vært delaktig i prosessen. Kodeboka inneholdt forklaringer på svar. Disse svarene var jeg bundet til. Forklaringene er ikke alltid elevenes forklaringer, men en tolking av deres svar som andre grupper av lærere står for.

5.6.1 Reliabilitet av koding

For å kunne vurdere sensorreliabiliteten, dvs. i hvor stor grad to uavhengige sensorer vurdere oppgavene likt, ble det trukket ut fem svarhefter fra fem forskjellige permer, dvs 25 av totalt 650 besvarelser. Svarene ble vurdert av to og to personer blant en gruppe på fem, og resultatet ble sammenlignet og vurdert på ny av de samme to for å bli enig om hvilken kode som skulle brukes på ulike svaralternativer.
Flervalgsoppgavene og oppgaver som skulle ha et bestemt svar, var uproblematiske under dette arbeidet. Svarene hørte til i én og bare én kategori.
Oppgaver som krevde en forklaring ga noe divergerende resultat. En kan lett tolke et svar mer enn en skal, eller tolke feil. Målet må jo være at ulike personer skal kode likt for at reliabiliteten skal være høy.
Ved å beregne feilkoding i snitt for alle oppgavene i denne diagnostiske testen, kom jeg fram til en feilkoding på 8,11 %. Sensorene er helt enige i 91,89 % av spørsmålene, noe som betyr at det høy intern konsistens i reliabiliteten (Ary et al,1996).

Tabell 5.1 viser imidlertid divergens i koding for noen utvalgte oppgaver. Det sier meg at tekst kan være vanskelig å plassere i en kategori, og at jeg må være på vakt når jeg leser hva elevene har skrevet. Ved ny vurdering viste det seg å være feilkoding av den ene part. Det var elevenes utydelig skrift, feiltolking av teksten eller å legge mer inn i teksten enn man skulle, eller å overse kode som var problemet.

Oppgave 21 b. var imidlertid svært vanskelig å kode rett. Det skyldes at det er vanskelig å anslå ting som veier henholdsvis 1 g, 100 g, 10 kg. Likeledes er det vanskelig for den som skal kode å bestemme nøyaktig hvor et svaralternativ hører hjemme. Jeg har av denne grunn valgt å se bort fra **oppgave 21.**
Jeg har også sett bort fra **oppgavene 22 – 24** siden de er på slutten av heftet. Jeg vet slett ikke om tidsfaktoren har vært en hindring i å besvare alle oppgavene, men "ubesvart" prosenten er stor.(se 5.7.3).

Tabell 5.1 *Reliabilitet av koding for utvalgte oppgaver*

Oppgave	Antall oppgaver	Antall avvik	Prosentvis avvik
10a	25	2	8
10b	25	1	4
11a	25	0	0
11b	25	5	20
12a	25	0	0
12b	25	8	32
16	25	7	28
17	25	3	12
18	25	3	12
20a	25	3	12

De største avvikene finner en altså på oppgaver der det inngår forklaringer som skal tolkes, eller der det er nyanser som skiller svarkategoriene.
Det var et nyttig og nødvendig arbeid før en fortsatte kodingen av besvarelsene.

5.7 Metode og resultater

5.7.1 Innledning

Populasjonen i dette utvalget består av 650 elever på grunnkurs i videregående skole – alle de 13 studieretningene. Telemarkforskning, Notodden, har stått for utvelgelsen av skoler og klasser.
En må anta at det er et representativt utvalg og at de metodene som er brukt ved utvelgelsen er i trå med aksepterte retningslinjer. Samme institusjon sto for utsending og innsamling av oppgavene.
Oppgavene ble sendt skolene i desember 1999. Testen ble avholdt i januar 2000, og innsamling av oppgavene var gjort i løpet februar/mars – 2000.
Etter hvert som oppgavene kom til ILS, ble besvarelsene kodet og sendt tilbake til Notodden der alle data ble lagt inn i SPSS, (The Statistical Package for the Social Science). SPSS er et omfattende statistisk software – program.

Tabell 5.2 viser hvordan det representative utvalget fordeler seg på studieretninger.

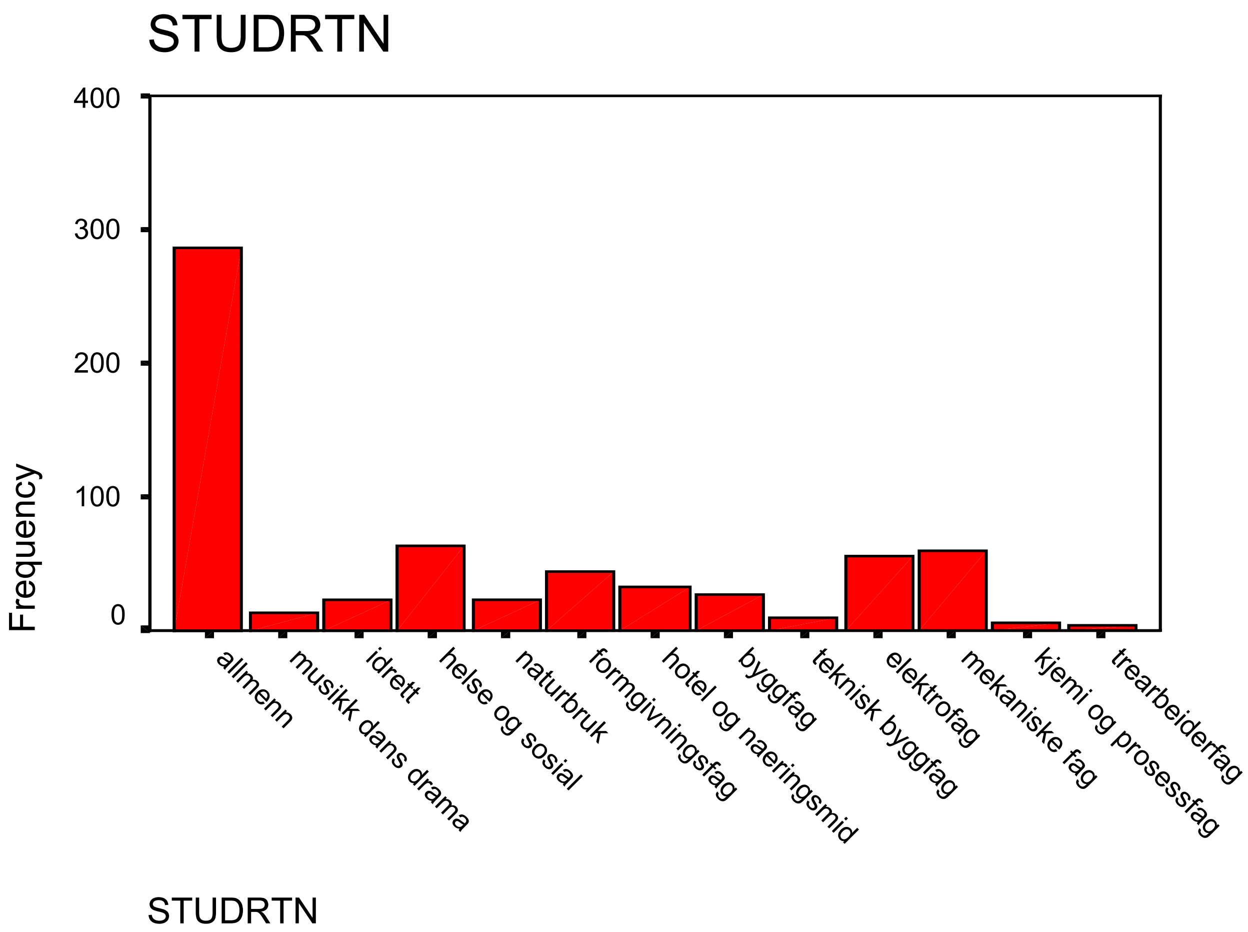
Tabell 5.2 *Fordeling av elever på studieretninger*

STUDIERETNING	Frekvens	Prosent
allmenn	287	44,2
musikk dans drama	14	2,2
idrett	23	3,5
helse og sosial	64	9,8
naturbruk	24	3,7
formgivningsfag	44	6,8
hotell og næringsmiddelfag	33	5,1
byggfag	27	4,2
teknisk byggfag	10	1,5
elektrofag	56	8,6
mekaniske fag	59	9,1
kjemi og prosessfag	5	,8
trearbeiderfag	4	,6
Total	650	100,0

Denne fordelingen er ikke særlig forskjellig fra den virkelige fordelingen blant elever i den videregående skolen på det tidspunkt undersøkelsen ble foretatt, (St.meld.nr.32, (1998-1999), Videregående opplæring).

Frekvensrubrikken viser at det kun er 5 henholdsvis 4 elever fra studieretning for kjemi og prosessfag og trearbeiderfag, mens nesten halvparten av elevene går i studieretning for allmenne fag.

Figur 5.1 viser et søylediagram over samme utvalget.



Figur 5.2

5.7.2 Prosedyre

Data fra de diagnostiske oppgavene er som sagt lagt inn i et dataprogram som kan behandles statistisk. Disse dataene vil bli behandlet kvantitativt. Jeg vil først se på det totale resultatet fra undersøkelsen og spesielt behandle oppgaver som måler volumforståelse. Den kvantitative analysen vil presenters deskriptivt og analytisk.

De samme oppgavene vil også behandles kvalitativt. Da vil elevers forklaringer på en del oppgaver være grunnlag for en analyse, og jeg vil forsøke å finne ut noe om elevenes evne til å løse volumoppgaver.

5.7.3 Presentasjon av data

Tabell 5.3 viser utfallet av testen i store trekk. Den viser hvilket emne som testes i de ulike oppgavene, hvor mange prosent som ikke har besvart oppgavene, som har svart rett, tilnærmet rett eller har gitt andre svar.

Tabell 5.3

Oversikt over innholdet i testen.

Oppgave	emne	ubesvart i %	rett svar i %	tilnærmet rett svar [5]	andre svar i %	sum i %
1	lengde	5,4	79,8		14,8	100
2	lengde, omkrets	1,5	66,3		32,2	100
3	areal	23,4	30,8	13,4	32,4	100
4a	lengde	4,0	63,1		32,9	100
4b	”	14,9	57,8		27,3	100
5	fart	2,2	65,5		32,3	100
6	vinkelmål	1,1	91,4		7,5	100
7	”	1,2	82,8		16,0	100
8a	tid	5,1	72,5		22,4	100
8b	”	21,5	12,5		66,0	100
9	tetthet	2,5	54,5		43,0	100
10a	volum	2,5	75,1		22,4	100
10b	“	2,8	17,5		79,7	100
11a	volum	2,3	18,5		81,2	100
11b	“	22,5	2,3	8,8	66,4	100
12a	volum	2,6	64,8		32,6	100
12b	“	9,1	22,2	40,9	27,8	100
13	måleenheter	4,6	17,1		78,3	100
14a	tid	2,3	64,0	6,2	27,5	100
14b	”	10,0	51,7		38,3	100
15	fart	1,2	76,8		22,0	100
16	volum	25,7	12,8		61,5	100
17	areal/overflate	16,9	20,8		62,3	100
18	volum	8,2	48,6		43,2	100
19	areal	24,8	9,2	8,2	57,8	100
20a	volum	10,5	3,4		86,1	100
20b	“	11,2	40,2		48,6	100
20c	“	22,9	6,9	16,7	53,5	100
21a	masse	7,8	36,9		55,3	100
21b 1)	“	17,8	38,6	5,2	38,4	100
21b 2)	“	21,7	33,4	19,2	25,2	100
21b 3)	“	18,6	24,6	21,2	35,6	100
22	måleusikkerhet	15,1	18,3		66,6	100
23	målestokk	20,9	19,1	20,3	39,7	100
24	areal	24,5	48,2		27,3	100

[5] Overslag som er tilnærmet rett svar i oppgave 3 og 19, unøyaktig måling i oppgave 23, tellefeil i oppgave 14a. Oppgavene 11b, 12b, 20c, 21b 1-2-3 er ufullstendig forklart.

Dataene viser stor variasjon i mengden av ubesvarte oppgaver. For flere oppgaver er det mellom en femdel og en firedel som **ikke har besvart oppgaven.** De oppgavene som peker seg ut med høy ubesvart – prosent er **oppgavene 3, 8b, 11b, 16, 19 og 20c.**
Dataene viser også stor forskjell i mengden av **rett svar**. Her peker **8b, 10b, 11a og b, 13, 16, 19 og 20a og c** seg ut med lav ”rett svar” frekvens.

For meg synes det som om oppgaver som ikke kan løses ved å sette inn i en formel eller som er utradisjonell i en eller annen forstand, hører til i kategoriene over.
Jeg vil se nærmere på oppgaver i volum i testen, både standard oppgaver og de oppgavene som er mer utradisjonelle, for å få en oversikt over hvilke problemer elevene har; problemer som kan føre til misoppfatninger.

5.8 Oppgaver som måler volumforståelse

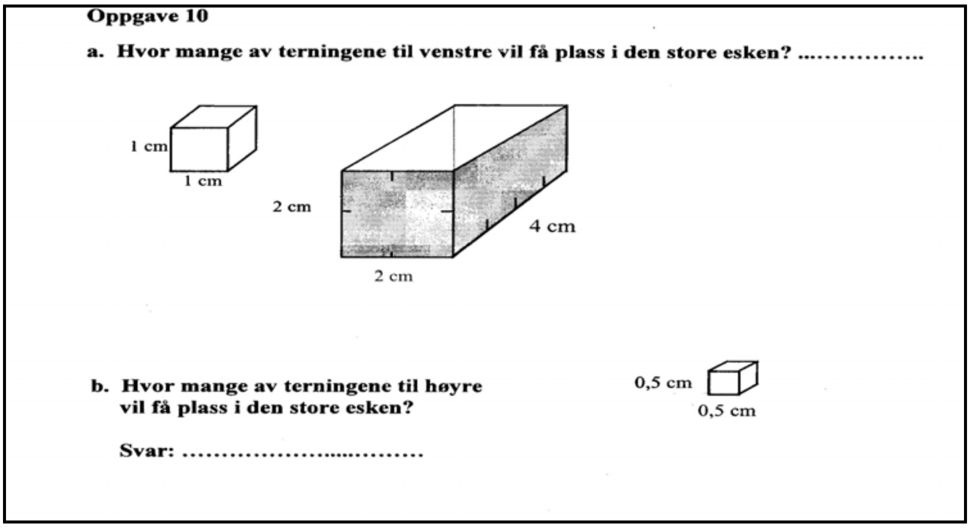
Det er flere oppgaver i den diagnostiske testen som måler volumforståelse: oppgavene 10, 11, 12, 16, 18 og 20. I oppgave 17 skal overflaten av en boks beregnes, men siden en del elever regner ut volumet, tas også denne oppgaven med.

Jeg vil først se på disse oppgavene enkeltvis, men sette dem inn i kategorier. Deretter vil jeg ta for meg noen av oppgavene i forhold til studieretninger. Jeg vil se på oppgave 18 i tilknytting til oppgave 11**,** og se etter sammenhenger. Jeg vil sammenligne oppgave 20 med tilsvarende oppgave som ble gitt i Diagnostisk prøve for grunnskolen 1997.

5.8.1 Volumbegrepet

I to av oppgavene i testen skal elevene finne volumet av prismer, i oppgave 10 og i oppgave 12. Oppgaveteksten i de to oppgavene er litt forskjellig. I oppgave 10 skal esken fylles opp med terninger som vist i figur 5.2. I oppgave 12 skal Sigrid bygge opp klossen av små terninger som figur 5.3 viser. I begge oppgavene er det antall terninger det spørres etter, og det krever en forståelse av hvordan volumet bygges opp.

5.8.1.1 Hvor mange av terningene til venstre vil få plass i den stor esken?



Figur 5.2

Figur 5.2 viser oppgave 10 som skal teste elevenes volumbegrep.

Tabell 5.4 viser resultatet av 10 a) og tabell 5.5 resultatet av 10 b).

Tabell 5.4 *Hvor mange terninger vil få plass i esken?*

Svarfordelingen av oppgave 10a	Frekvens	Prosent
ubesvart	16	2,5
16 (rett svar)	488	75,1
4	5	,8
8	30	4,6
12	23	3,5
20	14	2,2
24	15	2,3
48	2	,3
andre svar	57	8,8
Total	650	100,0

Tabell 5.3 viser at ca. 75% gjør oppgave a) rett.
Elevene blir ikke bedt om å forklare hvordan de kommer fram til svaret, og det er derfor vanskelig å si hvordan de har tenkt. Nortvedt (1998) viser at ca. 2 % av elevene i 6. klasse bruker formel for å finne volum, mens ca.23 % av elevene i 9. klasse gjør det. Jeg vil tro at andelen har økt noe fra grunnskolen til videregående skole.

Jeg hadde ventet at så å si alle elever i videregående skole skulle gjøre oppgave 10a) rett. Det er vanskelig å gi en forklaringer på de andre svaralternativene i a). Jeg viser til Nortvedt 1998 for grundig behandling av forklaringer. Jeg tar her med et utdrag.

Svaret 8 kan skyldes at en ser for seg ett lag av terninger i esken, enten at bunnen fylles opp eller at en langside dekkes. Kanskje de har *glemt* lag nummer to. Det kan jo også tenkes at eleven har addert tallene på figuren i mangel på andre tilnærminger.

De andre svarene som tabellen viser, kan skyldes at elever feiltolker figuren eller at de beregninger flater på ulik sett. Elevene som gir slike svar har sannsynligvis ikke klart for seg forskjellen mellom overflate og volum. Hva er vanskeligheten her? Er begrepene overflate og volum bare ord som brukes i faget matematikk og som ikke har noen tilknytting til virkeligheten? Språket kan også være et hinder for en del elever; at det bare blir ord uten innhold. Kanskje leter de febrilsk etter en formel de kan bruke i øyeblikket, uten å tenke verken praktisk eller logisk. Dette er jo en oppgave i matematikk, og da må det finnes en formel.

Uten forklaringer blir det nærmest gjetting å finne begrunnelser for svar som 12, 20, 24 og 48.
Det kan tenkes at svaret 12 framkommer som $2 \cdot 2 = 4$ terninger i forkant av figuren, og deretter 3 lag *innove*r. Tilsvarende kan svaret 20 framkomme som $2 \cdot 2 = 4$ terninger, og deretter 5 lag *innover.* Det kan være at elevene feiltolker figuren, teller feil avmerkinger. Svarene 24 kan være dobling av de 12 og 48 kan være nok en dobling, uten at jeg kan forklare hvordan elevene da tenker.

Tabell 5.5 viser svarene på oppgave 10b). Nå er det bare 17,5% av svarene som er riktige, mens det er 47,4% som dobler antall terninger når sidekanten i enhetsterningen halveres.

Det kan se ut som at volumforståelsen ikke er fullt utviklet, men muligheten for at elevene har gjort et hastverksarbeid, uten å tenke seg om, er også tilstede. Det kan se ut til at elevene tenker en eller to i stedet for tre dimensjoner.

Tabell 5.5 *Terningsiden er 0,5 cm*

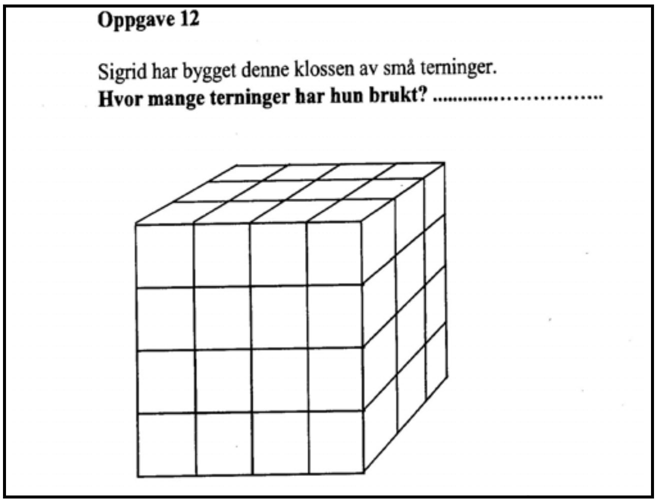
Svarfordeling oppgave 10b	Frekvens	Prosent
ubesvart	18	2,8
Åtte ganger svaret i a (rett svar)	114	17,5
Fire ganger svaret i a	136	20,9
To ganger svaret i a	308	47,4
andre svar	74	11,4
Total	650	100,0

Elevene presterer svakere når oppgavetypen avviker fra en enkel *sett inn i formel* oppgave. Det tyder på at begrepene volum og overflate bare er delvis utviklet, og at misoppfatninger oppstår. I denne oppgaven volder volumets tre dimensjoner et problem.. Kanskje kunne denne oppgaven falt bedre ut dersom elevene opp gjennom årene hadde fått muligheten til å utføre slike målinger i praksis. M 87 anbefaler jo akkurat denne arbeidsmåten, men en kan stille spørsmål om denne arbeidsmåten etterfølges i praksis. Skolen må ha en del materiell tilgjengelig dersom en skal utføre praktiske forsøk. Har skolen det som er nødvendig for å følge læreplanen i praksis?

5.8.1.2 Sigrids kloss

Også oppgave 12 viser om elevene forstår hvordan volum bygges opp.

Figur 5.3 viser oppgave 12 og tabell 5.6 viser svarfordelingen.



Figur 5.3

Tabell 5.6 *Hvor mange terninger trenger Sigrid for å bygge en kloss på 4x4x3?*

Svarfordeling oppgave 12a	Frekvens	Prosent
ubesvart	17	2,6
48 terninger (rett svar)	421	64,8
64	26	4,0
40	9	1,4
80	33	5,1
30	11	1,7
96	17	2,6
1000	1	,2
60	2	,3
andre svar	113	17,4
Total	650	100,0

Oppgave 12 inneholder neppe noe uvant, og også her skulle en forvente rett svar fra en stor del av elevene. Det ser ut til at noen elever har telt feil antall terninger . Svaret 64 terninger, som er 4^3, må muligens kunne sidestilles med svaret 48 terninger som er det rette svaret ut fra figuren. Under den forutsetningen betyr det at ca.69% av elevene svarer rett.

Vedlegg 2 viser forklaringer på svarene i 12 a).

Her kommer det fram hvordan elevene bygger opp volum ved å bruke formel (22,2 %) eller å finne antall terninger i et lag og multiplisere med antall lag (35,8 %).

Forklaringen på at Sigrid trenger 40 terninger, skyldes at det er telt opp eller beregnet synlige terninger.

Svar på 80 er en dobling av 40 for å kompensere for de terningene som *ikke syns*. Nortvedt (1998) viser også til at dette svaret kan komme fram ved å tenke seg 16 terninger på fem sider. Det er faktisk 5,2 % av elevene som svarer 80.

En lignende begrunnelse kan gis for 30 terninger: $4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3$ er terninger som synes helt eller som en ser en del av.

Dobler en 48 terninger får en 96 terninger uten at jeg kan forklare tankegangen bak et slikt svar. Det er kanskje mer sannsynlig at elevene tenker 6 sideflater som alle inneholder 16 terninger
Hele 17,4% gir andre svar. Jeg sitter igjen med spørsmålet:

Hva er det som hindrer elever fra å løse en så enkel volumoppgave ?

Det kan være mange mulige forklaringer på spørsmålet:

Noen svar kan selvsagt være tilfeldige feil – regnefeil. Det kan også se ut til at en del elever ikke skiller mellom volum og overflate fordi de ikke greier å se for seg romlige legemer ut fra en todimensjonal figur. Det antall terninger Sigrid trenger, er de som synes for elevene. De tenker ikke at de små terningene bygger opp hele terningen, også de terningene som er i det indre.

Jeg har i 2.2 4. vist til forsking der man hevder at når elevene skal løse et matematisk problem, er dette noe som ikke har med virkeligheten å gjøre. Da har det kun med matematikk å gjøre, og det hindrer dem i å tenke logisk.
De fleste har nok fra tidligere år bygget med klosser, for eks. ”lego” - klosser, og gjort sine erfaringer med oppbygging av geometriske figurer. Da er det et tankekors at så mange elever har problemet med å finne antall terninger som trengs i 10 a) og 12.

5.8.2 Volum – overflate

5.8.2.1 Sigrids kloss

I oppgave 12 skulle elevene svare på hvor mange terninger Sigrid trengte for å bygge opp klossen. Tabell 5.7 viser at det øyensynlig er en del elever som tenker og beregner terninger de ser på overflaten, i stedet for å tenke hvordan klossen er bygd opp. Elevene ser ikke terningene i *det indre* av klossen.

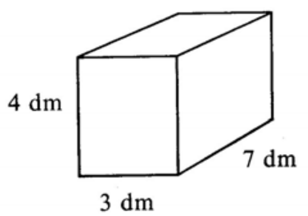
5.8.2.2 Beregning av overflate

I oppgave 17 skal en boks dekkes med kvadratiske fliser, der flisene er 1 dm^2 . Elevene skal altså beregne overflaten av boksen i figur 5.4.

Tabell 5.7 viser at 20,8 % kommer fram til rett svar, 122 fliser, mens nesten like mange, 19,8 %, kommer fram til 84. De beregner volumet i stedet for overflaten. Det kan ha mange årsaker. Det kan skyldes at elever er lite vant med å beregne overflaten av et prisme og at de vanligvis skal finne volumet. Det kan også være at elevene har vanskeligheter med å tolke den todimensjonale figuren til tre dimensjoner.

En del beregner antall fliser som må til, men tar ikke med alle sideflatene. Det er ingen forklaring på svarene i oppgaven, men det ser ut til at noen teller opp for tre, fire eller fem sideflater. Figur 5.4 har tre synlige sideflater, og en del elever ser ikke boksen som tredimensjonal.

Oppgave 17



Guri vil dekke ***hele boksen*** med kvadratiske fliser. Flisene er på 1 dm^2.

Hvor mange fliser trenger hun? ....

Figur 5.4

Tabell 5.7 *En boks skal dekkes med fliser, hvor mange trenger man ?*

Svarfordeling oppgave 17	Frekvens	Prosent
ubesvart	110	16,9
122 fliser (rett svar)	135	20,8
101 12+12+28+28+21 fem flater (uten bunn)	4	0,6
84 $3 \cdot 4 \cdot 7$ volum	129	19,8
61 12+21+28 tre flater (synlige)	12	1,8
14 3+4+7	11	1,7
80 12+12+28+28 fire flater	16	2,5
108	9	1,4
Andre svar	224	34,5
Total	650	100,0

Noen av svarene er nok tilfeldige feil. Svaret 108 skyldes sannsynligvis at elevene ikke ser at langsidene er forskjellig fra bunn/toppflaten: $3 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 7 \cdot 4 = 108$

Hele 34,5 % viser *andre svar*; svar som ikke hører hjemme i noen av de oppstilte kategoriene. Jeg regner med at mange svar i denne kategori er tilfeldige feil.

En del elever har problemer med å skille mellom begrepene volum og overflate. Oppgavene 12 og 17 viser dette.

5.8.3 Volumbegrepet – størrelser

Noen av volumoppgavene i KIM - testen er spesielle og utradisjonelle. Det er oppgaver der elevene må gjøre overslag og eventuelt bruke formel for å teste svaret. Elevene må også ha en forståelse for gitte størrelser og kunne sammenligne dem med hva de vet fra før.

5.8.3.1 Vil det være plass til 4 personer i en kasse med volum 1 m^3 ?

I oppgave 11 skal elevene krysse av blant alternativene og forklare svaret. Se figur 5.5
.

Oppgave 11

Vil det være plass til 4 personer i en kasse med volum 1 m^3?
Sett kryss:

☐ Ja
☐ Nei
☐ Usikker

Figur 5.5

Oppgave 11 er en diagnostisk oppgave av en type som elevene neppe har løst tidligere. Den krever at en vurderer hvor stor en kubikkmeter er og alternative former for hvordan en kubikkmeter kan se ut.

Tabell 5.8 viser at ca. 30% er usikre på hva de skal svare. De som begrunner denne usikkerheten, svarer at det kommer an på hvor store menneskene er eller hvordan kassens utforming er. De argumenter fornuftig og viser at de vurderer situasjonen.
18,5% mener at det vil være plass, mens 44,3% mener nei. Mange kommer med en påstand uten begrunnelse. Andre har problemer med hvor stort ”noe” er som er $1 m^3$, og hvordan det kan se ut. $1\ cm^3$ og $1\ dm^3$ er nok størrelser som elevene er mer kjent med enn $1\ m^3$.

Oppgave 11 er nok svært uvant for elevene. De skal ta stilling til ulike forhold. De må vurdere volumet av et menneske og tenke hvilken dimensjon det er naturlig å bruke. De må også se for seg alternative former for en kasse som skal romme $1\ m^3$ og sammenholde det med menneskets volum . Det er forståelig at det oppstår problemer.

Tabell 5.8 viser resultatet.

Tabell 5.8 *Vil det være plass til 4 personer i en kubikkmeter?*

Svarfordeling oppgave 11a	Frekvens	Prosent
ubesvart	15	2,3
ja (rett svar)	120	18,5
nei	288	44,3
usikker	193	29,7
andre svar	34	5,2
Total	650	100,0

Tabellen viser at elevene har problemer med oppgaver av denne type. Her må en gjøre overslag for å komme fram til et svar. Det er sannsynligvis en arbeidsmåte de er lite vant med.

Vedlegg 3 gir en oversikt over begrunnelser for svarene.

Det er interessant å sammenligne utfallet i denne oppgaven med utfallet i oppgave 18 der elevene skal ta stilling til volumet til en voksen mann.

5.8.3.2 Volumet av kroppen til en voksen mann

Også denne oppgaven tester volumforståelse. Elevene må igjen gjøre overslag og vurdere overslaget for å komme fram til et akseptabelt svar.

Oppgave 18

Omtrent hvor stort tror du volumet av kroppen til en voksen mann er?
Sett kryss:

- ☐ $7\ dm^3$
- ☐ $70\ dm^3$
- ☐ $7\ m^3$
- ☐ $70\ m^3$

Figur 5.6

Tabell 5.9 viser at nesten halvparten av elevene krysser av for rett svar på oppgave 18. De ser altså at det eneste mulige svaret ut fra alternativene som er gitt, må være 70 dm^3.

Dette resultatet kan neppe skyldes tilfeldighet. Jeg vil si at det vitner om en stor grad av forståelse om størrelsen til menneskekroppen.

Tabell 5.9 *Omtrent hvor stort tror du at volumet til en voksen mann er?*

Svarfordeling oppgave 18.	Frekvens	Prosent
ubesvart	53	8,2
70dm^3 (rett svar)	316	48,6
7dm^3	108	16,6
7m^3	114	17,5
70m^3	26	4,0
andre svar	33	5,1
Total	650	100,0

Da er det underlig at det kun er 18,5% som i oppgave 11 mener at det er plass til 4 personer på 1 m^3. En kan stille spørsmål om svaret på denne oppgaven hadde blitt annerledes hvis oppgave 18 var stilt opp før oppgave 11?

Jeg vil se nærmere på dette forholdet i 5.12.

5.8.3.3 En kasse på 0,5 m^3 - hvordan ser den ut?

En tredje oppgave som måler volumforståelse og som kan settes inn i denne kategori, er oppgave 16. Oppgaven viser seg å være vanskelig. Mer enn firedelen forsøker ikke å tegne kassen på 0,5 m^3. Kun 12,8% tegner kassen med mål rett.

Det kan se ut til at elevene er lite trent i å tegne 2-dimensjonale illustrasjoner av 3-dimensjonale legemer; illustrasjoner som skal hjelpe dem i å løse problemer i matematikk.

Elever er nok mest vant med å få oppgitt sidene for å beregne volumet av ulike legemer. Når kun volumet er gitt og ingen sider, vet de ikke hvordan de skal begynne for å løse problemet. De er øyensynlig ikke vant til å tenke baklengs.

Oppgave 16

Olav arbeider på et lager som sender matvarer til butikker. Han skal pakke varer i kasser. De største kassene har et volum på 0,5 m^3.
Tegn et forslag til hvordan kassen på 0,5 m^3 kan se ut. (Sett på mål.)

Figur 5.7

Vi ser videre av tabell 5.10 at 10,5% tegner kassen som et rektangel eller som et kvadrat, med eller uten mål. Andre tegner kassen, men setter ikke mål på eller setter på tall som ikke er rett.

Tabell 5.10 *Tegn et forslag på hvordan en kasse på 0,5 m^3 kan se ut.*

Svarfordeling oppgave 16	Frekvens	Prosent
ubesvart	167	25,7
korrekt tegna kasse på $0{,}5m^3$ (rett svar)	83	12,8
0,5 x 0,5 x 0,5	74	11,4
5 x 5 x 5	2	,3
eleven har regna feil- f. eks 0,2x0,2x0,125 ol.	114	17,5
kasse der elev har skrevet 0,5m¨3 ved en/flere av sidene	18	2,8
tegnet figur uten mål	52	8,0
eleven tegner et kvadrat, med eller uten mål	35	5,4
eleven tegner et rektangel, med eller uten mål	33	5,1
andre svar	72	11,1
Total	650	100,0

Mange av svarene er nok beheftet med tilfeldige feil. Elevene har neppe testet svarene sine, noe som ville vist at volumet blir alt annet enn 0,5 m^3 .

5.8.4 Volumbegrepet – dimensjoner

En fjerde kategori som det kan være naturlig å se på er hvilke strategier elevene bruker når dimensjonen av enhetsterningen i oppgave 10 b) endres og når diameter i måleglasset i oppgave 20 a) halveres.

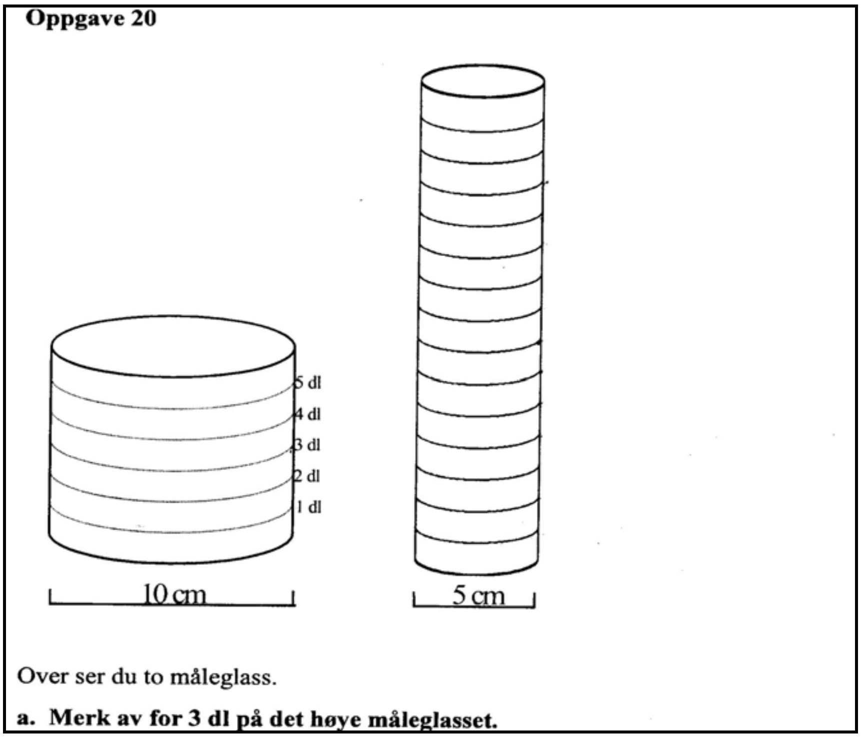
5.8.4.1 Hvor mange terninger med side 0,5 cm får plass i den store esken ?

Jeg viser tilbake til 5.8.1.1 der oppgave 10 b) ble presentert og til tabell 5.5. Som det kom fram av tabellen, falt *rett svar* frekvensen drastisk da siden i enhetsterningen ble halvert. Mens 75 % greidde oppgave 10 a), var det 17,5 % som fikk rett svar i oppgave 10 b). 47,4 % doblet antall terninger, og 20,9 % multipliserte antallet med fire. Elevene ser ut til å ha vanskeligheter når de skal ta hensyn til mer enn én dimensjon.

5.8.4.2 Måleglasset

Oppgave 20 er en oppgave der forståelsen av dimensjoner skal testes som i oppgave 10 b). Elevene skal sette merke for 3 dl på det smale måleglasset som har en diameter som er halvparten av diameter i det vide glasset. Se figur 5.7.
Som vi ser av tabell 5.11 er det bare 3,4 % av utvalget av elever i videregående skole som greier å merke av for 3dl på måleglasset til høyre. Det kreves ingen forklaring på hvordan de tenker for å sette merket, men ca. 60 % merker av på 6.delstrek. Elevene tenker i en dimensjon som de også gjorde i oppgave 10b). Når en halverer diameter, må høyden dobles. Nortvedt (1998) hadde tilsvarende resultat med denne oppgaven for 9. klasse.
Denne diagnostiske oppgaven burde avkrevd en forklaring på svaret. Det ville gitt meg bedre innsikt i hvordan elevene tenker. De som merker av for 7,5 dl, deler de 15 delene i glasset til høyre på to, sannsynligvis fordi merket for 3 dl på glass til venstre er halvdelen av de 6 delene der.

Elever som merker av for 3 dl ved 6. eller ved 7,5 delestrek, ser i hvert fall at volumet må stige i det smale måleglasset. De er i stand til å konservere volum.



Figur 5.8

Tabell 5.11 *Merk av for 3 dl på det høye glasset*

Svarfordeling oppgave 20a	Frekvens	Prosent
ubesvart	68	10,5
merket av på 12.delstrek (rett svar)	22	3,4
merker av midt på målebegeret (7,5)	4	0,6
merker av på 6.delstrek	388	59,7
merker av på 3.delstrek	17	2,6
merker av på andre delestreker	95	14,6
andre svar	56	8,6
Total	650	100,0

Elevene får store problemer med denne oppgaven. Det kan skyldes at det er en oppgavetype de ikke har vært borte i tidligere. De forenkler problemstillingen. Hadde elevene vært vant med å utføre praktiske øvinger med å helle en væske fra en beholder til en annen av ulik dimensjon, ville de kanskje ha reflektert nærmere over væskehøyden i de to måleglassene.

5.9 Oppgaver som måler volumforståelse - oppsummering

Ved å se på resultatet av oppgaver som måler volumforståelse, finner en at det for en del elever oppstår vanskeligheter med enkle oppgaver av typen ”å finne volum av et prisme når sidene er gitt” eller ”å finne hvor mange terninger som trengs” som i oppgavene 10 a) og 12 a).

En av fire elever har problemer med slike oppgaver.

Mange skiller ikke mellom volum og overflate. Det tyder på at begrepene er ord uten innhold. Det kan se ut til at mange elever ikke har erfaring i å forestille seg romlige figurer, og at de har vanskeligheter med å tolke og forstå illustrasjoner som i oppgavene. Det vitner om mangel på arbeid med praktiske problemer som øver opp forståelse av volum både hjemme og på skolen. De har for liten erfaringsviten; erfaringer som skulle oppnås gjennom undersøking og eksperimentering.

Når oppgavene er mer utradisjonelle, øker ubesvart frekvensen sterk, og rettsvar frekvensen synker drastisk. Det kan være oppgaver som krever overslag og vurderinger som i oppgave 11, 18 og 16.

Det kan synes som elevene er vant med å løse oppgaver som er tilrettelagt i svært stor grad. De er blitt vant med å løse standard oppgaver der det er unødvendig å analysere problemet for å komme fram til en brukbar metode. Andre forklaringer, som tidligere er satt fram (Schoenfeld 92), er at elevene forventer å løse en oppgave i matematikk umiddelbart, uten å bruke tiden til tankevirksomhet.

I kapittel 5.8 har vi også sett at elevene har problemer med dimensjoner. I oppgave 10 b) mente nesten 50 % av elevene at halvering av sidene i en terning, ville gi rom for dobbelt så mange terninger i det gitte volumet. I oppgave 20 a) var det kun 3,4 % av elevene som svarte rett, mens 60 % mente at en halvering av diameter i måleglasset førte til dobling av høyden dersom en skulle få plass til 3 dl. Jeg vil si at elevenes volumbegrep er begrenset. Over generalisering er et annet ord som kan brukes om denne type misoppfatning. Elevene overfører mål for lengden på en størrelse til en annen, uten å tenke volum og tre dimensjoner.

Det ser ut til et volumbegrepet er vanskeligere enn en tror, og at elevenes volumforståelse på dette nivå er mangelfullt.

5.10 Resultater i forhold til studieretninger

De diagnostiske oppgavene har vært gitt til elever i de 13 studieretningene som har eksistert i den videregående skolen siden Reform 94 ble innført. Elevtallet i de ulike studieretningene som er med i undersøkelsen, er svært forskjellig, noe som reflekterer det virkelig elevtallet i skolen på det tidspunkt testen ble gjennomført (St. meld. nr 32, (1998-1999)).
.
Siden reliabiliteten øker når spredningen er stor, er det naturlig å se på resultater i de ulike studieretningene. Jeg synes det vil være interessant å se på noen oppgaver i forhold til studieretninger. Jeg finner det naturlig å bruke noen av de samme volumoppgavene som tidligere for å se om det er forskjeller mellom elevers prestasjoner når en ser det i forhold til studieretninger.

Tabell 5.12 viser utfallet *rett svar* på noen volumoppgaver i forhold til studieretninger.

Resultater for ulike studieretninger Tabell 5.12

Rett svar i prosent

Studie-retning	Frekvens	Prosent	Oppgave 10a	Oppgave 10b	Oppgave 11	Oppgave 12a	Oppgave 16	Oppgave 20a
Allmenn	287	44,2	84,3	23,3	16,4	76,7	21,3	4,5
Musikk dans drama	14	2,2	92,9	28,6	14,3	92,9	7,1	
Idrett	23	3,5	73,9	13,0	13,0	69,6		
Helse og sosial	64	9,8	57,8	7,8	12,5	43,8		1,6
Naturbruk	24	3,7	75,0	20,8	20,8	62,5	12,5	20,8
Formgivingsfag	44	6,8	59,1	4,4	6,8	36,4	4,5	
Hotell og næring	33	5,1	57,6		15,2	36,4		
Byggfag	27	4,2	70,4	14,8	33,3	55,6	14,8	3,7
Teknisk byggfag	10	1,5	60,0	10,0	20,0	40,0		
Elektrofag	65	8,6	82,1	26,8	21,4	78,6	16,1	3,6
Mekaniske fag	59	9,1	64,4	11,9	35,6	55,9	5,1	
Kjemi prosessfag	5	0,8	80,0	20,0	20,0	80,0		
Trearbeiderfag	4	0,6	75,0		50,0	25,0		
TOTAL	650	100	75,1	17,5	18,5	64,8	12,8	3,4

Elevene skårer høyest på oppgavene 10 a) og 12 a). Det er naturlig at elevene gjør det best på standard oppgaver. Men er det forskjell fra studieretning til studieretning?
Jeg velger å se bort fra utfallet for kjemi og prosessfag og fra trearbeiderfag på grunn av et lite antall elever.

Rett svar i prosent varierer fra ca. 58 til 93 % på oppgave 10 a), og fra ca.36 til 93 % på oppgave 12 a). På begge oppgavene er det elever fra studieretningene allmenne fag, musikk, dans og drama og elektrofag som kommer best ut, med elever fra idrettsfag hakk i hæl.
At elever fra studieretning fra musikk, dans og drama kommer best ut er kanskje ikke så underlig. Disse elevene er ett år eldre enn de andre fordi matematikkfaget ble lagt til videregående kurs 1 på denne studieretningen. Slik har det vært siden R-94 ble innført og fram til skoleåret 2000/2001. Det er få klasser på denne studieretningen. Som en konsekvens av dette må elevene ha gode karakterer fra grunnskolen for å komme inn på studieretning for musikk, dans og drama.

Det er ellers å bemerke at de yrkesfaglige studieretningene kun har 3 timer matematikk pr uke, mens de studieforberedende studieretningene har 5 timer.

Elever som søker de studieforberedende studieretningene er vanligvis mer interessert i boklig lærdom. Riktignok er det også på disse studieretningene elever som kommer inn på sitt andre eller tredje valg, eller elever som blir plassert, fordi de tross alt har rett på en skoleplass, og det er billigere å opprette klasser i allmenne fag enn i yrkesfag eller på studieretning for musikk, dans og drama.

At elever fra studieretning for elektrofag skårer høyt kan forklares ved at det er vanskelig å få plass på denne studieretningen, det er få klasser, og det er elever som er interessert i elektronikk som søker seg dit. De studieretningsfagene de har på elektrofag, grunnkurs, krever en del matematikk. Etter forespørsel om antall timer til matematikk på dette grunnkurset, svarte avdelingsleder for elektrofag ved én skole at matematikk ble integrert i studieretningsfagene, men han trodde nok at elever på grunnkurs elektrofag hadde flere timer i matematikk enn elever på de andre yrkesfaglige studieretningene. Jeg vet ikke om dette er praksis ved andre skoler. Det har siden R-94 ble innført vært et mål å yrkesrette de allmenne fag og dermed faget matematikk.

Hvordan er resultatet for oppgavene 10 b) og 20 a) der volumoppgavene krever forståelse for dimensjoner?
Her faller gjennomsnittsskåren drastisk. Det gjør den også når en ser på de ulike studieretningene. For oppgave 10 b) varierer resultatet for rett svar fra ca. 5 til bortimot 30 %. Det er igjen elever fra allmenne fag, musikk, dans og drama og elektrofag som gjør det best.

Oppgave 20 a) kommer enda dårligere ut. Elever fra en del studieretninger kommer ikke på lista i det hele tatt. Nå er det plutselig elever fra studieretning for naturbruk som kommer best ut med en gjennomsnittlig skår på 20,8 %, mens elever fra studieretning for allmenne fag i gjennomsnitt skårer 4,5 %.

Mulige forklaringer på at elever fra studieretning for naturbruk kommer best ut, kan være at disse elevene har en erfaringsviten med seg hjemmefra, og at skolene er flinke til å yrkesrette matematikk og naturfag. De fleste elevene på denne studieretningen kommer fra landsbygda og fra gårdsbruk hvor måling av melkemengder, kraftfôr med mer er en del av de daglige gjøremål.

Oppgave 11 viser også interessante resultater. Oppgaven er ikke så mye knyttet til den matematikken en arbeider med i skolen, men elevene får vise praktisk sans; de må gjøre et overslag om det er plass til fire mennesker i en kasse på 1 m^3 . Her er det elever fra studieretning for byggfag og mekaniske fag som skårer høyest, med henholdsvis 33,3 og 35,6 %. Deretter følger elever fra studieretning elektrofag, naturbruk og tekniske byggfag med henholdsvis 21,4, 20,8 og 20,0 %. Elever fra studieretning for allmenne fag, som vanligvis betraktes som de skoleflinke, viser ikke i samme grad denne praktiske sansen. De er kanskje mer opphengt i ”det de har lært på skolen” enn å bruke praktisk sans.

I oppgave 16, en åpen oppgave som fordrer tegning av kassen på 0,5 m^3, er det elever fra allmenne fag som gjør det best med et gjennomsnittskår på 21,3 %, mens elever fra studieretning for elektrofag kommer nest best ut med 16,1 %. Elever fra studieretningene byggfag og naturbruk følger etter med henholdsvis 14,8 og 12,5 %. Andre studieretninger kommer ikke på listen i det hele tatt.

En ser at det er interessante forskjeller mellom elever fra ulike studieretninger.

Når det gjelder *standard* oppgaver gjør elever fra de studieforberedende studieretningene det best. Når mer *uvanlige* oppgaver skal løses, gjør elever fra yrkesfaglige studieretninger det like godt eller bedre enn elever fra de studieforberedende studieretningene. Dette er oppgaver der en kommer langt med praktisk sans og hvor det er naturlig å gjøre overslag. Oppgavene krever jo kun enkel matematikk.

5.11 Har elevenes volumforståelse økt fra 9.klasse til grunnkurs i vgs.?

Oppgave 20, blant de diagnostiske oppgavene i denne testen, er tilnærmet lik oppgave 16 i test I i KIM - prosjektet 1997 som også omhandler måling og enheter (Nortvedt 1998). Forskjellen mellom de to oppgavene er at måleglasset til høyre er forsynt med hel - trukne målestreker i "min" utgave.
Siden jeg har resultatet fra 9. klasse, vil jeg sammenligne resultatene fra 9. klasse, test I, og grunnkurs i videregående skole for denne oppgaven.

Tabell 5.13 *Oppgave 20a - en sammenligning mellom grunnkurs og 9. klasse*

	Grunnkurs vgs		9. klasse
Svarfordeling oppgave 20a	Frekvens	Prosent	Test I (i prosent)
ubesvart	68	10,5	19,3
merker av på 12. delestrek (rett svar)	22	3,4	1,6
merker av midt på målebegeret (7,5)	4	0,6	1,0
merker av på 6. delestrek	388	59,7	46,6
merker av på 3. delestrek	17	2,6	16,9
merker av på andre delestreker	95	14,6	8,9
andre svar	26	8,6	5,7
Total	650	100,0	100,0

Men har volumforståelsen økt fra grunnskolen til videregående skole?
Vi ser at det er flere elever i videregående skole som i hvert fall har forsøkt å løse oppgaven. Vi ser også at *rett svar* - prosenten er godt og vel doblet. Samtidig setter snaut 60 % av elevene fra videregående skole av merket på 6.delestrek, mens det er 46,6 % av elevene fra 9. klasse som gjør tilsvarende. Fortrinnet elever i videregående skole har ved de to første punktene på svarfordelingen, tas igjen ved de andre svaralternativene.
Det virker ikke som at volumforståelsen har økt i løpet av ett skoleår, dette til tross for at utformingen av oppgaven, dvs. figuren er blitt bedre.

Ved å sammenligne utfallet av de to testene, ser en altså at det skjer lite ny læring i løpet av et år på områder som er *kjent* for elevene. Volumberegning skulle være et slikt område. For at elevene skal komme videre, må det skje noe drastisk. Det må oppstå en konfliktsituasjon der elevene må streve for å overvinne denne situasjonen. Det har de ikke muligheter for på en kortvarig test som dette. I en normal undervisningssituasjon skulle det være mulig å lage et undervisningsopplegg som klargjør sammenhengen mellom diameter og høyden i de to sylinderne.

Oppgave 20 er vanskelig for en stor del av elevene. Det kan skyldes manglende volum - forståelse, eller det kan være at oppgaven er av et slag som elevene er uvant med. Volumforståelsen er bare delvis utviklet.

5.12 Testens utforming – spiller den noen rolle?

Jeg viser til kapitlene 5.8.3 der jeg så på resultatet for oppgavene 11 og 18. Jeg stilte spørsmål ved rekkefølgen av de to oppgavene. Ville det være flere elever som kunne ta stilling til om det var mulig å få plass til fire personer i en kasse på 1 m^3 dersom oppgave 18 var plassert foran oppgave 11? Det var jo nærmere 50 % av elevene som mente at volumet av kroppen til en voksen mann var 70 dm^3 , mens det kun var 18,5 % som svarte rett på oppgave 11.

En krysstabell, tabell 5.14, av disse to oppgavene viser at av de 316 elevene som sier at et voksen person har et volum på 70 dm^3, er det 58 som mener det er plass til 4 personer i 1 m^3. Men siden oppgavene følger i *feil* rekkefølge, ser ikke elevene tilbake for å se om det er rimelig svar som er gitt i oppgave 11.

Vil det være plass til 4 personer i en kubikkmeter? Omtrent hvor stort tror du volumet til en, voksen mann er?

Tabell 5.14 *Krysstabell*

		Omtrent hvor stort tror du volumet til en voksen mann er?						
		Ubesvart	70 dm^3	7 dm^3	7 m^3	70 dm^3	andre svar	total
Vil det være plass til 4 personer i en kubikkmeter?	Ubesvart	6	5	1	2	1		15
	ja	6	58	32	17	2	5	120
	nei	18	145	54	53	9	9	288
	usikker	19	92	15	38	13	16	193
	andre svar	4	16	6	4	1	3	34
	Total	53	316	108	114	26	33	650

For å undersøke om oppgavenes rekkefølge har betydning for svaret elevene gir, ga jeg de 27 elevene i egen klasse disse to oppgavene i motsatt rekkefølge.

Av de 27 svarte 23 elever at volumet av en voksen mann var 70 dm^3 . Av disse 23 var det 4 stykker, dvs. 17,4 %, som svart rett på oppgave 11, og disse overførte resonnementet fra oppgave 18 til oppgave 11. Én svarte rett på denne oppgave 11 selv om hun hadde feil svar på oppgave 18.

I den nasjonale undersøkelsen er det 58 av 316, dvs. 18,4 %, som svarer rett på oppgave 11. Det er altså like stor del som svarer rett på denne oppgaven likegyldig hvilken rekkefølge de kommer i.
Det ser ut til at rekkefølgen av oppgavene spiller liten rolle for de fleste. Det som er det avgjørende for svaret i oppgave 11, er i stor grad om elevene ser kassen på 1 m^3 som en terning med side 1 m eller om de ser andre muligheter. Det virker som de er helt fastlåst i sin forestillingen av størrelsen.
I denne oppgaven som i andre, for eks. oppgave16, viser mange at de ikke greier å gjøre om fra en enhet til en annen. Eksempler : 70 dm^3 = 7 m^3 , 1 m^3 = 100 dm^3 , 70 dm$^3 \cdot 4$ = 280 dm^3 "som er større enn 1 m^3 ." Omgjøring av enheter er for mange en vanskelighet som gjør at svarene blir feil.

Rekkefølgen av oppgaver som har lite med hverandre å gjøre, som i denne testen, ser altså ut til å være likegyldig.

5.13 Oppsummering

Jeg har i dette kapitlet gjort rede for noen resultater fra den diagnostiske testen i Måling og enheter for grunnkurs i videregående skole. Jeg har spesielt sett på oppgaver i testen som har målt volumforståelse for å prøve og få innsikt i elevenes volumbegrep i grunnkurs på videregående skole.

Det er tydelig at elevene gjør det best på enkle, standard oppgaver, men også her viser 25 % at de har problemer. Mer krevende oppgaver, problemoppgaver, faller dårligere ut i denne testen. En del elever har problemer med å skille mellom volum og overflate. Mange har et mangelfullt begrep om størrelser, spesielt om størrelser de er lite vant med å bruke, og mange får problemer når en størrelse endres.

Vi ser også at elever fra enkelte studieretninger gjør det bedre enn elever fra andre, men dette varierer med oppgavetypen.

Oppgave 20, som er den eneste oppgaven jeg har data på fra ungdomsskolen, viser at det skjer lite ny læring i løpet av et år.

Kapittel 6. En kvalitativ analyse av elevbesvarelser

6.1 Innledning

Noen av oppgavene i KIM - testen som måler volumforståelse, krever en forklaring på hvordan elevene tenker. I oppgave 11 har elevene gitt forklaringer på sine svar i spørsmålet om det er plass til fire personer i en kasse med volum 1 m^3. I oppgave 12, Sigrids kloss, skal elevene forklare hvordan de kom fram til antall terninger som må til. I oppgave 16 har elevene tegnet et forslag til hvordan en kasse med et volum på 0,5 m^3 kan se ut, og satt på mål, men ikke gitt forklaring. Det kreves heller ingen forklaring til oppgave 17, 18 og 20 a), oppgaver som tester forståelse av overflate og volum.

For å få innsikt i elevenes tenkemåte på de oppgavene jeg tok for meg i kapittel 5 og som jeg i ettertid ønsket forklaringer til, ga jeg noen oppgaver fra testen til grunnkursklasser jeg har hatt/har i matematikk de to siste skoleår. Det er klasser i studieretning for allmenne fag.

Klasse 1A hadde jeg i 1MX skoleåret 2000/2001. Rogaland Fylke har fritt skolevalg, og alle elevene i klassen var primærsøkere til skolen. Siden elevene også hadde en svært internasjonal bakgrunn, ble de samlet i en klasse som rekrutterer til International Baccaleaureat (IB) ved skolen. Det som skiller undervisningen i denne klassen fra de andre grunnkursklassene, er at noe av undervisningen foregår på engelsk, samt at klassen får to timer ekstra i ”kulturforståelse”.
Elevene kom fra 17 forskjellige skoler, enten fra ungdomsskoler i distriktet eller fra utlandet. Klassen må kunne beskrives som en god middels klasse i matematikk, med et jevnt faglig nivå. De fleste var svært ambisiøse, og ville gjerne inn på IB linjen.

Klasse 1B har jeg dette skoleåret, 2001/2002. Disse elevene kom også inn på skolen på sitt første valg. De kommer fra 21 ungdomsskoler i ulike område av fylket. Elevene er norske, men mange av dem ønsker å søke seg til IB linjen.
Etter min oppfatning er elevene i klasse 1B er litt svakere enn klasse 1A i matematikk. Det er større forskjell på de flinkeste og de svakeste enn året før. Jevnt over er de nok noe mindre ambisiøse.

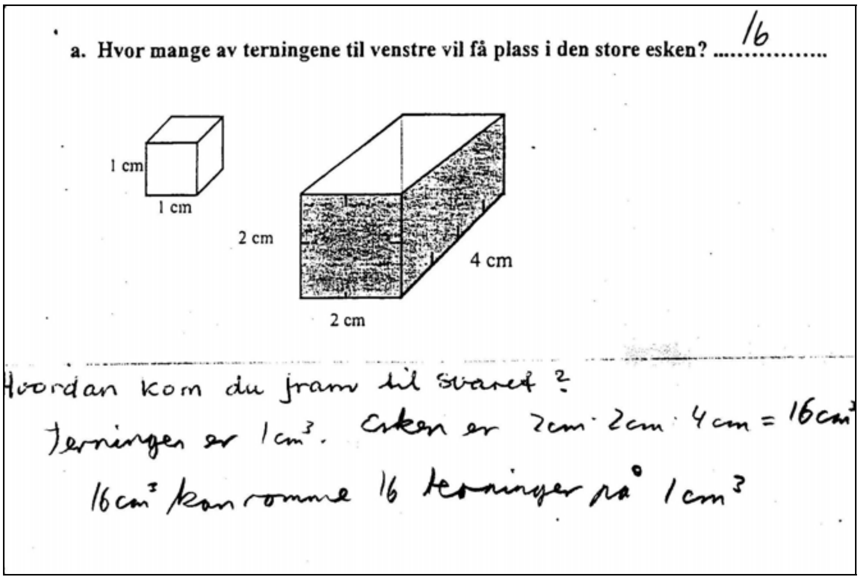
Jeg ba elevene i 1A og 1B om å forklare hvordan de tenkte når de svarte på oppgavene jeg ga dem. Selv om disse elevene fikk et bedre resultat enn elever i testen for øvrig, mener jeg at deres tenkemåte er representativ for testen som helhet. At resultatet jevnt over ble bedre her enn på den nasjonale testen for elever fra studieretning for allmenne fag, kan forklares ved at forholdene under besvarelsen var mindre stressende og kanskje var elevene mer motiverte. De hadde færre oppgaver og bedre tid.
Elevene besvarte disse oppgavene før vi behandlet emnet om areal og volum. Noen av oppgavene er prøvd ut på 1A , noen på 1B og noen på begge klassene, som tabellene 6.1 til 6.8 vil vise.

6.2 Volumbegrepet

Jeg tar igjen for meg oppgavene 10 a) og 12 for å se hvordan elevene forstår volumbegrepet. Jeg vil først se på svarene til 10 a)

6.2.1 Hvor mange av terningene til venstre vil få plass i den store esken?

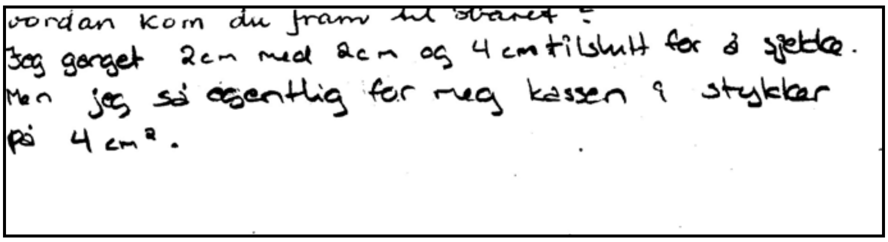
Denne eleven, elevsvar 1, viser at vedkommende kan formler for volumberegning, både for terningen og for "esken".



Elevsvar 1

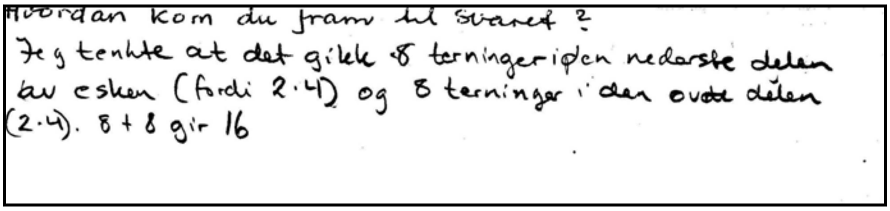
I resultatet fra KIM prosjektet var det 75,1 % som hadde rett svar på oppgave 10 a), men det kommer ikke fram av tabell 5.3 hvor stor del av disse som brukte formler for volum av terning og esken, eller hvor stor del som telte opp antall terninger på en eller annen måte. Jeg regner med at mer enn 20 % bruker formel, (se s.55).

Elevsvar 2 bruker to ulike strategier for å finne svaret. Eleven *sjekker* svaret ved å bruke formler, men ser for seg terningene som bygger opp esken i lag *bakover* i stykker på $4\ cm^3$. Det virker som eleven bygger opp esken visuelt før svaret gis.



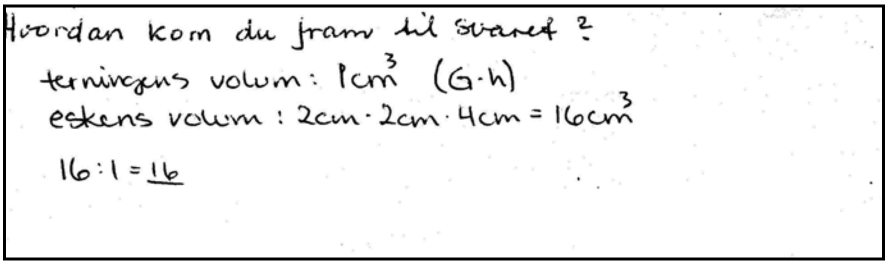
Elevsvar 2

Elevsvar 3 bygger opp esken i lag fra bunnen og opp. Jeg antar at eleven også kan formler, men siden jeg har bedt dem forklare hvordan de tenker, blir kanskje teksten mer utfyllende enn en kunne forvente.


Hvordan kom du fram til svaret?
Jeg tenkte at det gikk 8 terninger i den nederste delen av esken (fordi 2·4) og 8 terninger i den øvre delen (2·4). 8 + 8 gir 16

Elevsvar 3

Elevsvar 4 viser også bruk av formler for volum av terning og eske. Eleven finner deretter hvor mange små terninger det er plass til i den store i esken.


Hvordan kom du fram til svaret?
terningens volum: $1 cm^3$ (G·h)
eskens volum: $2cm \cdot 2cm \cdot 4cm = 16cm^3$
$16 : 1 = \underline{16}$

Elevsvar 4

Nesten alle elever i klassen som skrev svar på denne oppgaven, kom fram til 16 terninger. En jente hadde telt antall markeringer feil, og en elev hadde skrevet $4 \cdot 4 = 8$. Dette er tilfeldige feil, og kan ikke oppfattes som misoppfatninger. De fleste brukte formler, men noen bygde opp volumet i lag.

Tabell 6.1 viser resultatet for allmenne fag i KIM – prosjektet sammenlignet med resultatet i klassene1A og 1B.

Tabell 6.1 *Oppgave 10 a) – en sammenligning*

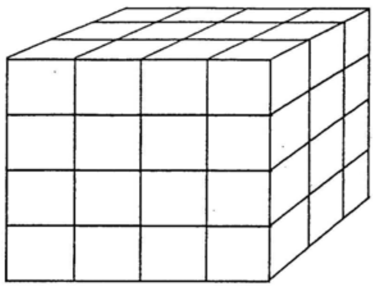
Oppgave 10a	Allmenne fag i KIM - prosjektet		Klasse 1A		Klasse 1B	
	Antall	i prosent	Antall	i prosent	Antall	i prosent
Ubesvart	3	1,0	0	0	0	0
Rett svar	242	84,3	26	89,7	25	96,2
Andre svar	42	14,7	3	10,3	1	3,8
Total	287	100	29	100	26	100

Vi ser at rett svar frekvensen er noe høyere i klassene 1A og 1B enn i landet for øvrig. Jeg har tidligere kommentert hva dette kan skyldes.
Mens *andre svar* fordeler seg i Kim – prosjektet etter Tabell 5.3, er det kun svaret 8 terninger jeg finner i klassene "mine".

6.2.2 *Sigrids kloss*

Oppgave 12 var i testen forsynt med "Forklar hvordan du tenkte" område, (vedlegg 3). De elevsvarene jeg tar med her er fra egen klasse.
Elevsvar 5 viser bruk av formel for å finne antall terninger som må til for å bygge opp Sigrids kloss. Eleven innfører 1 cm^3 som enhetsterningens volum selv om det ikke er sagt eksplisitt at én terning er 1 cm^3.
Det er rimelig at elevene etter 10 års skolegang utfører beregninger så rasjonelt og enkelt som det går an.

Sigrid har bygget denne klossen av små terninger.
Hvor mange terninger har hun brukt? ....48........



b. Forklar hvordan du tenkte:

lengde · bredde · høyde = volum

4cm · 3cm · 4cm = 48cm^3

Hver terning er 1cm^3, derfor e det 48 terninger i klossen.

Elevsvar 5

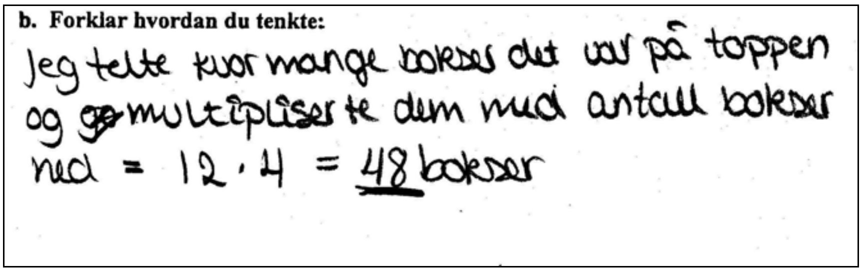
Denne eleven, elevsvar 6, tenker i lag. Hun/han teller eller beregner antall terninger i forkant og multipliserer antallet med 3 lag bakover.

b. Forklar hvordan du tenkte:

Helt forrest er det 4·4=16 terninger. Videre er det 3 "lag", hvorav hver har 16 terninger.
Altså, 3·16=48.

Elevsvar 6

Også eleven nedenfor, elevsvar 7, tenker i lag. Hun/han teller hvor mange terninger det er på toppen og multipliserer med antall lag nedover.


b. Forklar hvordan du tenkte:

Jeg telte hvor mange bokser det var på toppen og ~~ga~~ multipliserte dem med antall bokser ned = 12 · 4 = 48 bokser

Elevsvar 7

Noen elever løser problemet ved å bruke formel for volumet av klossen, mens andre tenker seg at den bygges opp med lag av terninger på en eller annen måte.

Jeg viser til tabell 5.6 s.57 over svarfordelingen fra Kim - prosjektet på oppgave 12 a).
Ved å gå inn på svarfordelingen for 12 b) i testen finner en at blant de elevene som har funnet rett antall terninger, er det 22,2 % som bruker en formel for oppbyggingen, mens 35,8 % tenker i lag. Dette resultatet er svært likt det Nortvedt (1998) fant i test I for 9. klasse.
Tabell 5.6 viser også at en del elever finner ut hvor mange synlige terninger det er, og at det er forklaringen på svarene 40, 80 eller 30. Når det gjelder svaret 96, kan det være en sammenblanding av volum og overflate.

Tabell 6.2 *Oppgave 12 – en sammenligning*

Oppgave 12	Allmenne fag i KIM - prosjektet		Klasse 1B	
	Antall	i prosent	Antall	i prosent
Ubesvart	4	1,4	0	0
Rett svar	220	76,7	23	88,5
Andre svar	29	21,9	3	11,5
Total	287	100	26	100

Tabell 6.2 viser at klasse 1B har et bedre resultat enn elever fra allmenne fag i KIM - prosjektet. Hadde det ikke vært for feil ved multiplikasjon, ville rett svar frekvensen vært enda større. Elevene har stilt opp oppgaven rett, men multiplisert ut feil. Dette vil selvsagt også kunne være tilfelle i resultatet fra Kim-testen.
I klasse 1B blir $4 \cdot 3 \cdot 4 = 39$ eller 36 blant de som gir andre svar.

6.3 Volum – overflate

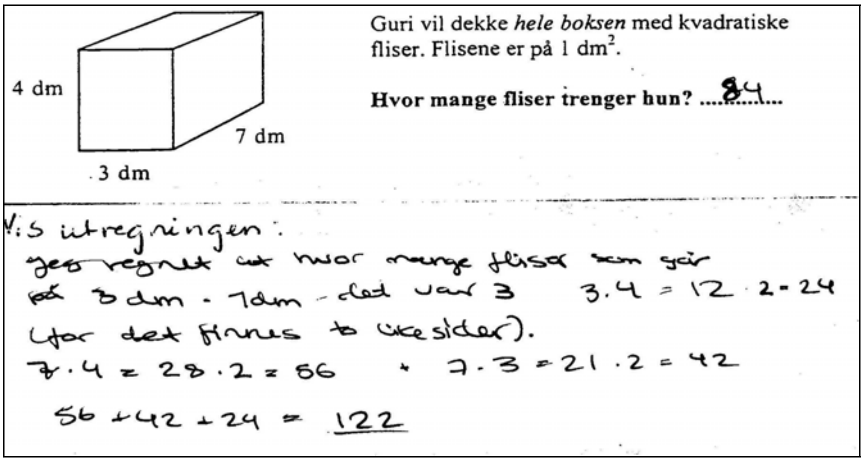
I kapittel 5.8.2 og i tabell 5.6 kom det fram at en del elever ikke ser ut til å skille mellom volum og overflate når de skal bygge opp Sigrids kloss. Resultatet fra oppgave 17 viser tilsvarende problem når en boks skal dekkes med kvadratiske fliser. Tabell 5.7 viser at nesten 20 % regner ut volumet i stedet for overflaten.

6.3.1 Beregning av overflate

Elevsvarene som vises her er fra grunnkurs allmenne fag høsten 2001. Elevene skal gi forklaring på hvor mange fliser som trengs for å kle boksen.

Elevsvar 8 inneholder en beregning som er gjort korrekt, men det er to svar på oppgaven.

Eleven forklarte i ettertid at hun hadde til hensikt å rette svaret hun først hadde skrevet, nemlig 84 til 122, men hadde glemt det. En skal ikke se bort fra at feil svar kan forekomme på denne måten, men det vil nok være i et lite omfang.



Elevsvar 8

Eleven tenker overflate og to og to like sideflater. En merker seg misbruket av likhetstegnet, noe som er svært vanlig når elevene kommer fra ungdomsskolen. Min erfaring er at elevene legger denne skrivemåten fort fra seg når de blir gjort oppmerksom på hvorfor det er feil.

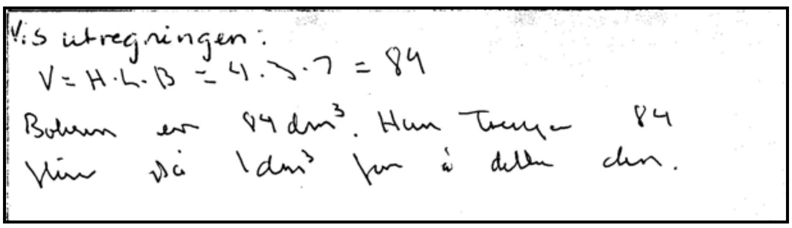
Elevsvar 9 viser at han/hun finner volumet i stedet for overflaten. En kan undre seg over hvordan eleven tenker seg en flis på 1 dm^3 . Kanskje tenker eleven enhetsterninger som i oppgavene 10 og 12?

Jeg intervjuet elever som hadde svart 84 fliser om hvordan de tenkte.
Her er noen elevsvar:

"Tenkte ikke overflate, kom bare på volum".

"Tenkte ikke over det. Uvant med å regne overflate. Vi pleier å regne ut volumet".

Eleven innrømmet at hun plukket fram en formel hun kjente.



Elevsvar 9

En tredje elev innrømmet også at han kun lette etter en formel han kunne bruke uten å tenke logisk.

is utregningen:
$3\ dm \cdot 7\ dm = \underline{21\ dm^2}$

Elevsvar 10

Eleven som har produsert elevsvar 10, har tenkt areal, men bare regnet ut én flate. Det er tvilsomt om hun har lest oppgaveteksten skikkelig, og forstått hva det går ut på. Det virket som jenta hadde lite tro på seg selv i matematikk.

Et svar som dette har nok i undersøkelsen gått inn i kategorien ”andre svar ” som utgjør hele 34,5 %.

is utregningen: $A = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 7 = 24 + 84 = \underline{108}$
Regnet ut arealet av overflaten. Ford
Flisene er $1\ dm^2$ blir det 108 fliser
$108\ dm^2 = 1\ dm^2 = 108\ dm^2$

Elevsvar 11

Elevsvar 11 gir forklaring på hvordan svaret 108 fliser kommer fram. Eleven tenker rett, men tolker figuren dit hen at det skal være fire like sideflater.

KIM - undersøkelsen viser at svært mange elever har problemer med å finne overflaten av en boks som i oppgave 17. Kanskje er det problemer som det arbeides lite med i grunnskolen. Det kan også tenkes at formuleringen av oppgaven førte til at elevene tenkte fliser som terninger som i oppgave 10 og 12. Jeg ville ikke tro at ordet *fliser* skulle være et stort hinder for å løse oppgaven, men en skal ikke se bort fra noen hindres ved formulering av oppgaven.

Tabell 6.3 *Oppgave 17 – en sammenligning*

Oppgave 17	Allmenne fag i KIM - prosjektet		Klasse 1A		Klasse 1B	
	Antall	i prosent	Antall	i prosent	Antall	i prosent
Ubesvart	34	11,8	0	0	0	0
Rett svar	81	28,2	22	75,9	17	65,4
Andre svar	172	60,0	7	24,1	9	34,6
Total	287	100	29	100	26	100

Tabell 6.3 viser stor forskjell i resultatet på den oppgaven når en sammenligner klassene 1A og 1B med KIM - prosjektet.
Her vil *andre svar* inkludere alle svaralternativene som en finner i tabell 5.7, også tilfeldige feil. Dersom en ser etter, vil en finne at 24 % av elever fra studieretning for allmenne fag i KIM - prosjektet beregner volum i stedet for overflate. Tilsvarende prosenttall for 1A og 1B er henholdsvis 10 % og 15,4 %.

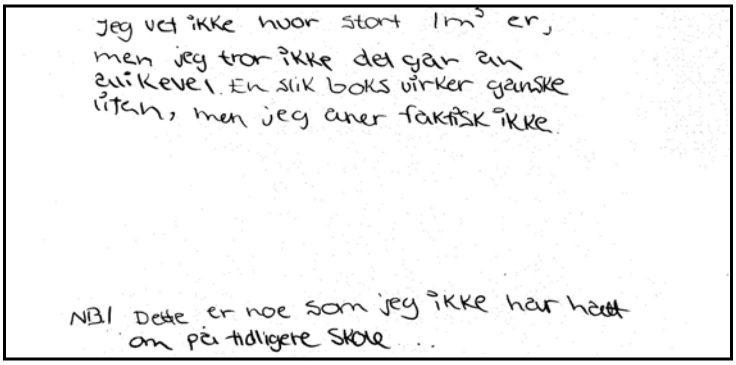
6.4 Volumbegrepet – størrelser

Jeg vil her vise en del elevsvar på oppgaver som jeg har kalt utradisjonelle fordi det er oppgavetyper elevene har arbeidet lite eller ingenting med. Det kan også være oppgaver som krever overslags regning eller oppgaver der en må arbeide *baklengs.*

6.4.1 Vil det være plass til 4 personer i en kasse med volum 1 m^3 ?

I oppgave 11 skal altså elevene ta stilling til om en kasse med volum 1 m^3 kan romme fire personer.
Frekvenstabellen i KIM- prosjektet forteller at mange har besvart oppgave a), men har problemer med å forklare sin påstand i b). Mange er usikre, og argumenterer alternativt, (vedlegg 3).
Elevsvarene som vises her er fra "mine" elever skoleåret 2000/2001.

Elevsvar 12 viser at eleven ikke ser for seg en kasse på 1 m^3 , og at problemstillingen er ny.

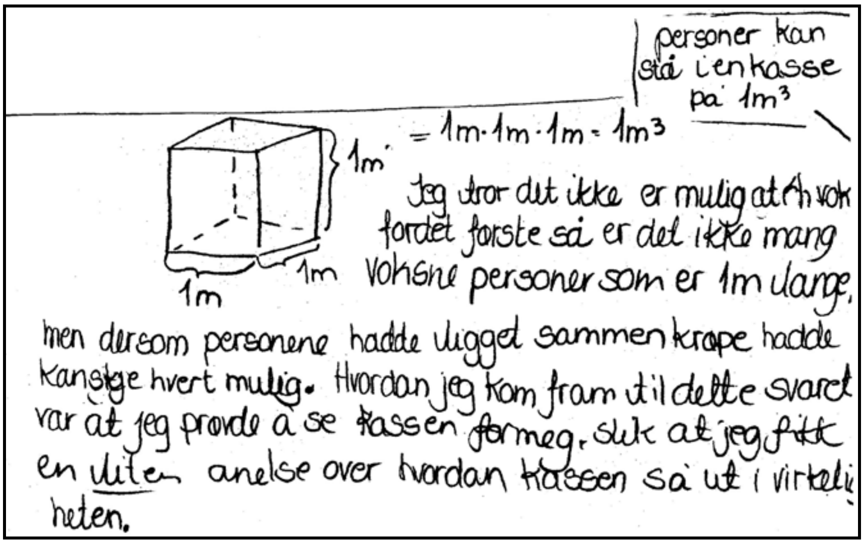

Jeg vet ikke hvor stort 1m³ er,
men jeg tror ikke det går an
allikevel. En slik boks virker ganske
liten, men jeg aner faktisk ikke.

NB! Dette er noe som jeg ikke har hatt
om på tidligere skole . .

Elevsvar 12

Det er ikke godt å si om eleven prøver å lage seg en forestilling om problemet ut fra det hun/han vet fra før, eller om vedkommende gir opp fordi det er en ny problemstilling. Det ser ut til at eleven leter etter et lignende problem eller en metode som hun/han skal kjenne igjen. Det lykkes ikke.

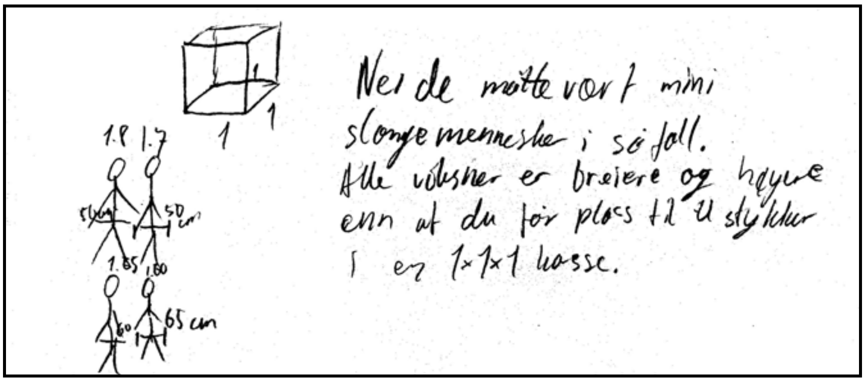
Elevsvar 13 viser at eleven forsøker å se for seg kassen som en kube med en meter lange siderkanter. Eleven er usikker på svaret ut fra denne forestillingen.
Eleven tenker ikke alternative former for kassens utseende. Dermed har eleven problemer med å tenke seg personer som er høyere enn 1m inn i kassen. En del elever som har samme oppfatning om kassens utforming, svarer at det ikke er mulig, mens andre svarer at det går dersom det er fire barn eller dverger.
Denne eleven prøver altså å forestille seg hvordan kassen ser ut, men svarer at det ikke går etter å ha diskutert med seg selv.



Elevsvar 13

Elevsvar 14 er svært representativt. Mange mener at svaret er nei, at det ikke går an å få plass til fire personer i 1 m^3 , men argumenterer med at det kunne gått dersom det var slangemennesker eller om personene satt på fanget til hverandre eller lignende.

Denne eleven forestiller seg personer med forskjellig høyde og bredde og viser med det at det ikke er mulig.

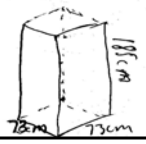


Elevsvar 14

Svar av denne type viser at elevene kun ser et volum på $1m^3$ som en kube med sidekant 1m. Det virker som at elevene er fastlåste i sin tenkemåte. De er vant med at oppgavene kun skal ha en løsning, og derfor har de ikke strategier for å se etter alternative løsninger. Problemstillingen er nok ny, og det er i seg selv et hinder når oppgaven skal løses.

Elevsvar 15 er eksempel på at elever kan tenke alternativt.

Det er fullt mulig hvis kassen er like høy som en normal voksen mann ca 185 cm. Når høyden er satt til 1,85 m, har vi fremdeles 0,54 m² igjen av kubikkmeteren vår. 0,54 m² blir til et kvadrat med siden ca 73 × 73 cm som er mer enn nok til å huse fire voksne, normalstrelse-mennesker.



Elevsvar 15

En del elever viser evne til å resonnere ut fra høyden til et menneske. Arealet en da står igjen med er jo ikke stort, men denne eleven mener i hvert fall det er mulig å få inn fire personer på flaten.

Jeg synes det er naturlig at elevene har problemer med å svare på oppgave 11. På mange måter er kanskje de beste svarene der elevene er usikre på om det er mulig å få fire personer inn i en kasse på $1m^3$. Det viser at elevene reflekterer over situasjonen.
Det som imidlertid er typisk for mange av svarene, er at de er svært rigide i sin tolking av hvordan en kasse på $1m^3$ kan se ut.

Tabell 6.4 *Oppgave 11 – en sammenligning*

Oppgave 11	Allmenne fag i KIM - prosjektet		Klasse 1A	
	Antall	i prosent	Antall	i prosent
Ubesvart	6	2,1	2	6,9
Rett svar (Ja)	47	16,4	10	34,5
Nei	145	50,5	11	37,9
Usikker	68	23,7	6	20,7
Andre svar	21	7,3	0	0
Total	287	100	29	100

Tabell 6.4 viser stor usikkerhet blant alle elever, både i KIM - prosjektet og i klasse 1 A. Det ser ut til at elevene i klasse 1A viser en større evne til å tenke andre former for en kasse på 1 m^3 enn i KIM- prosjektet.

6.4.2 Volumet av kroppen til en voksen mann

Jeg har tidligere vist at elevene i undersøkelsen viser stor forståelse for størrelsen til kroppen til en voksen mann i oppgave 18, og at dette er i motsetning til *rett svar* frekvensen i oppgave 11 der det er spørsmål om det er plass til 4 personer i en kasse med volum 1 m^3.
Noen elevsvar vil vise at det er mye sunn fornuft blant elevene når det gjelder oppgave 18.

Omtrent hvor stort tror du volumet av kroppen til en voksen mann er?
Sett kryss:

- [ ] 7 dm^3
- [x] ~~70 dm^3~~
- [x] 7 m^3
- [ ] 70 m^3

Hvordan kom du fram til svaret?
En mann er ca 160 cm høy, gjennomsnittlig 20cm brei og 10 cm tykk.
20cm · 10cm · 180cm = 36000 cm^3 = ~~3600~~ ~~3,6~~
360 dm^3 = ~~360~~ 3,6 m^3
3,6 m^3 er nermere 7 m^3 enn 70 dm^3

Elevsvar 16

Her tenker eleven en manns høyde, bredde og tykkelse. Omgjøring fra cm^3 til dm^3 til m^3 er et problem som gjør at eleven konkluderer feil. Eleven kan heller ikke ha noe begrep om hvor stort 1 m^3 er for da ville han/hun kommet på andre tanker.

Elevsvar 17 konkluderer med at volumet til en voksen mann er 7 dm^3. Denne eleven tenker også fornuftig når det gjelder høyde, bredde og tykkelse, men eleven har et omgjøringsproblem og mener at svaret ligger nærmere 7 enn 70 dm^3. Igjen er det *hvor stort noe er* som er et problem.

Hvordan kom du fram til svaret?
30 cm · 30cm · 170 = 153000 cm^3
15,3 dm^3
Dette er ca. det et menneskets volum er, men tallene varierer fra person til person

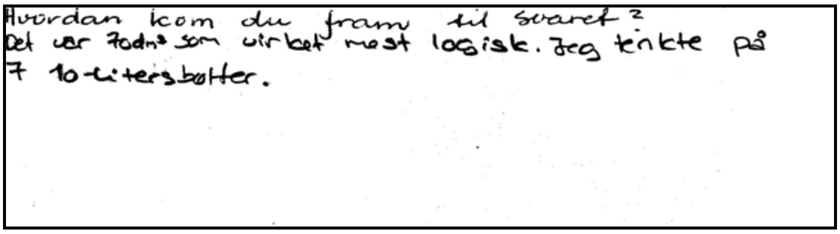
Elevsvar 17

Elevsvar 18 viser fornuftig resonnement som gir rett svar, 70 dm^3.

Hvordan kom du fram til svaret?
7 dm^3 er ca 7 l, som er lite.
7 m^3 vil si at om denne mannen er 1 m bred (usannsynlig) og 1 m lang (...), er han 7 m høy...
70 m^3 er enda større...
70 dm^3 høres ok ut, ca. 70 L med forskjellig masse..

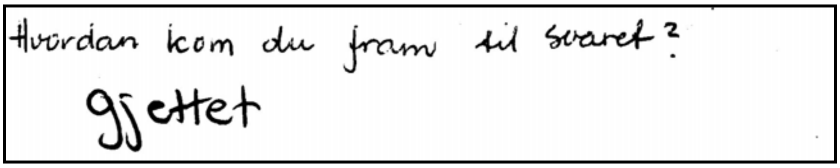
Elevsvar 18

Også elevsvar 19 viser fornuftig resonnement. Hun tenker annerledes, men likevel praktisk og logisk.



Elevsvar 19

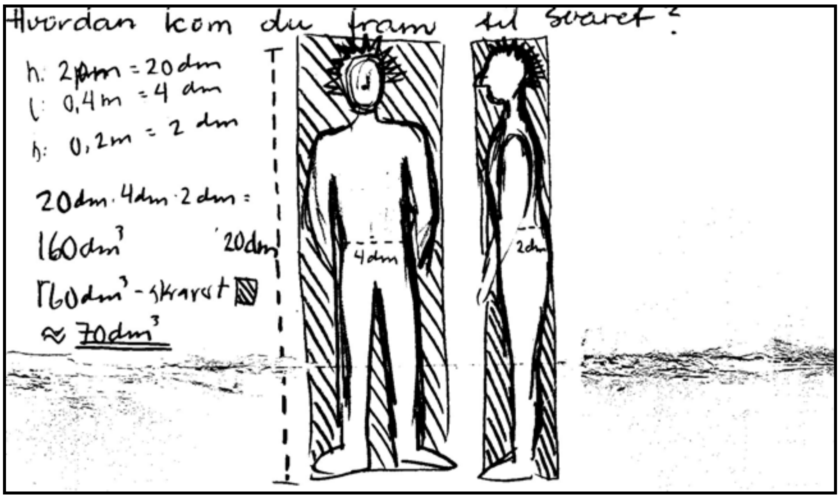
Og noen gjetter på rett svar. Det kan likevel ligge mer tankevirksomhet bak enn det som kommer fram. Kanskje har eleven størrelser som han/hun sammenligner med. En annen som gjetter sier i fortsettelsen at ”*det virket mest logisk*”.



Elevsvar 20

Elevsvar 21 viser tydelig at å finne ut volumet av kroppen til en voksen mann er et problem som er relativt kurant. Dersom ikke problemet med omgjøring hadde ødelagt for en del elever ville enda flere greidd denne oppgaven.

Oppgave 18 er en oppgavetype som mange elever har et forhold til; de tenker praktisk og logisk, og mange kommer fram til et rimelig svar.
Når det i oppgave 11 er spørsmål om det er plass til fire personer på 1 m^3 og elevene har problemer med å finne svaret her, må det bety at de enten er svært rigide når de ser for seg 1 m^3 eller at det er en størrelse som de ikke ser for seg eller som de assosierer med noe.



Elevsvar 21

Tabell 6.5 *Oppgave 18 – en sammenligning*

Oppgave 18	Allmenne fag i KIM - prosjektet		Klasse 1B	
	Antall	i prosent	Antall	i prosent
Ubesvart	17	5,9	0	0
Rett svar ($70 dm^3$)	157	54,7	14	53,8
Andre svar	113	39,4	12	46,2
Total	287	100	26	100

Tabell 6.5 viser at godt og vel halvparten av elevene både i KIM – prosjektet og i klasse 1B gjør et fornuftig overslag en voksen manns volum.

6.4.3 Tegn et forslag til hvordan en kasse på 0,5 m^3 kan se ut.

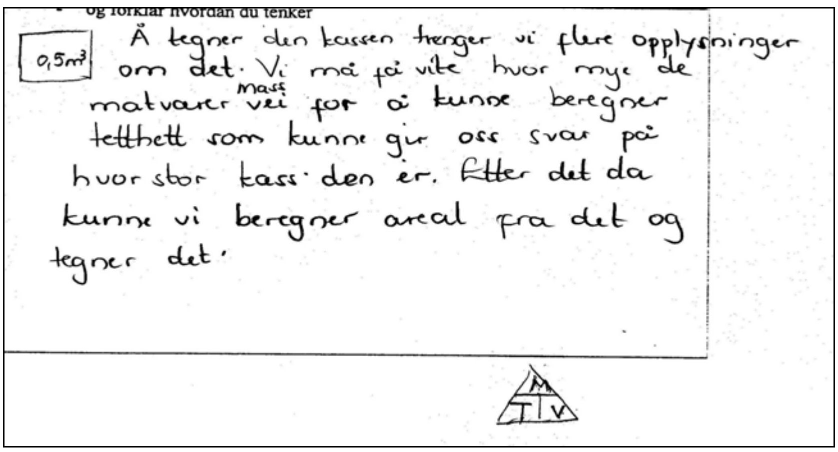
Oppgave 16, som også er plassert i denne kategori, viste seg å være et problem for svært mange elever. Firedelen av elevene tegner ikke kassen, og en kan lure på om de har problemer med å tegne en romlig figur. Mer enn 10 % tegner et kvadrat eller et rektangel med eller uten mål. Disse elevene ser ut til å ha vanskeligheter med å tegne i perspektiv. Andre tegner et prisme, men uten mål. Andre kasser hadde tallstørrelse på sidene, men de var uten benevning. Eksempler på det er

$0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5, \quad 5 \cdot 5 \cdot 5, \quad 0{,}5^3 \quad$ *eller* $\quad 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}125$ og lignende.

Kun 12,8% tegner kassen med riktige mål.

Siden elevene ikke ble bedt om å beskrive hvordan de tenkte, viser jeg eksempler på det ved noen elevsvar fra klassen "min", skoleåret 2000/2001.

I oppgave 16 skal altså elevene tegne et forslag til hvordan en kasse med et volum på 0,5 m^3 kan se ut, og sette på mål.
Oppgaven kan løses på mange måter, noe som også oppgave - teksten indikerer.


og forklar hvordan du tenker

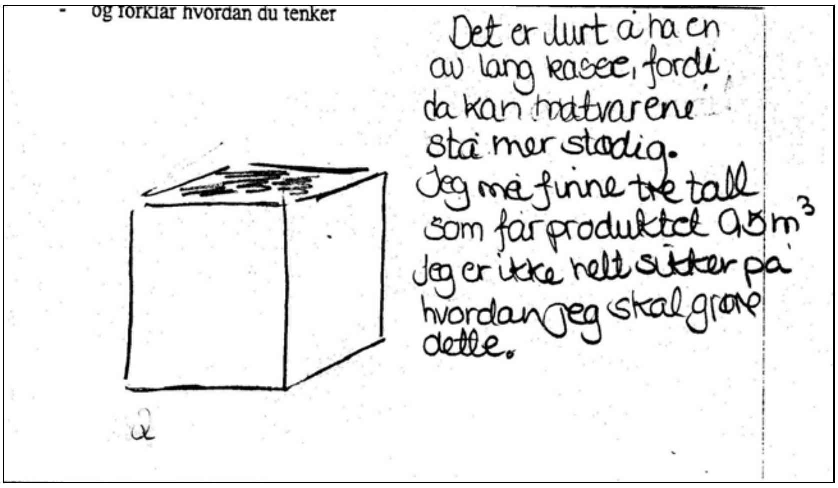
$0{,}5 m^3$

Å tegner den kassen trenger vi flere opplysninger om det. Vi må få vite hvor mye de matvarer veier (Mass) for å kunne beregner tettbett som kunne gir oss svar på hvor stor kass·den er. Etter det da kunne vi beregner areal fra det og tegner det.

M T V

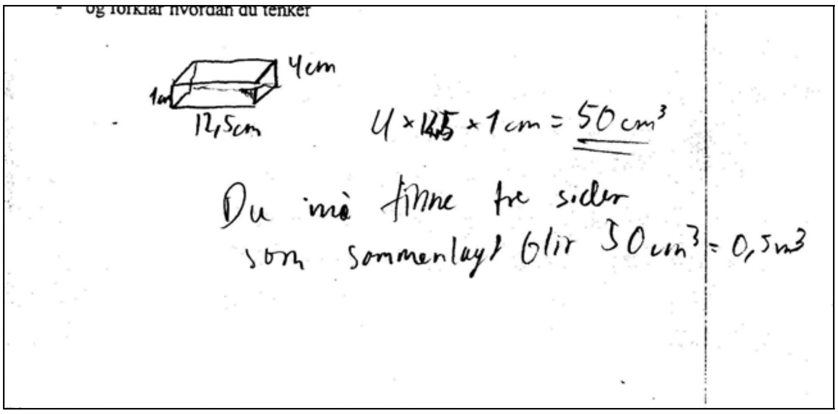
Elevsvar 22

Denne eleven**,** elevsvar 22, har øyensynlig mange problemer med å besvare oppgaven. Eleven blir forvirret av oppgaveteksten. Hun/ han må vite mer om matvarene som skal pakkes. Videre er eleven formel - fokusert. Vi ser en illustrasjon av en trekant med bokstavene V, T og M som eleven har lært for å bruke når oppgaver har med volum, tetthet og masse å gjøre. Teksten forteller at fordi noen av disse størrelsene ikke er gitt, kan vedkommende ikke løse oppgaven.
Det ser også ut til at eleven blander sammen areal og volum.



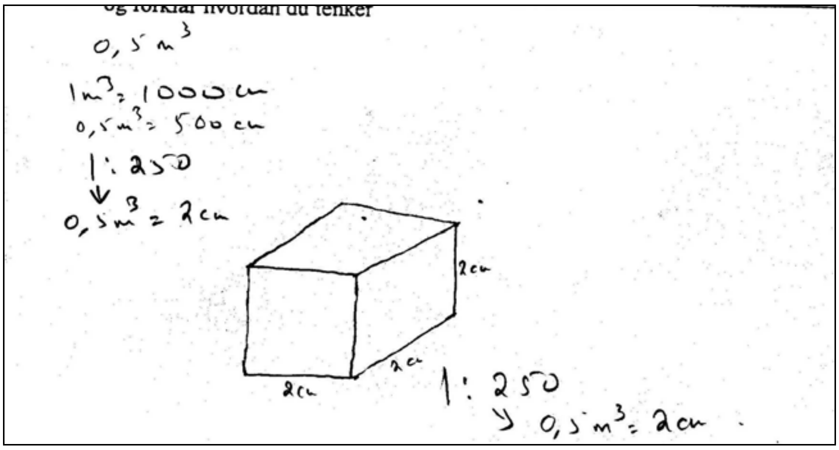
Elevsvar 23

Eleven, elevsvar 23, har tegnet en kasse og tenker seg at den bør være avlang. Det er imidlertid et problem å finne hvilke mål kassen skal ha. Eleven sier hun/han må finne tre tall som gir produktet 0,5 m^3, men er usikker på hvordan det skal gjøres. Det er umulig å si om eleven virkelig har prøvd å finne tall som passer, eller om vedkommende bare har gitt opp fordi en løsning ikke syntes umiddelbart. Eleven viser i alle fall en volumforståelse, men mangler en algoritme som kan brukes. Evnen til å prøve og feile ser ut til å mangle.
Det som også er karakteristisk for dette svaret, er at eleven henger seg opp i måten oppgaven er formulert på, konteksten. Det skal pakkes matvarer i en kasse, og da mener eleven at det er mest gunstig å bruke en lang kasse. Eleven kommer bare et stykke på vei til å løse oppgaven.



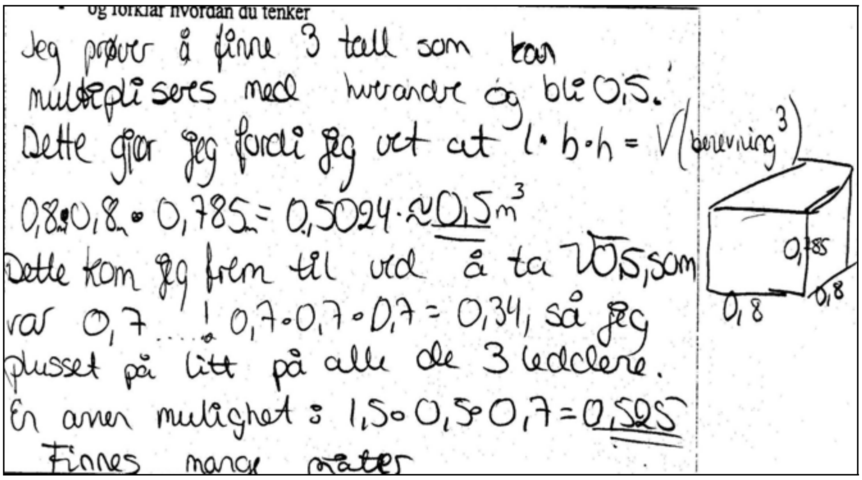
Elevsvar 24

Dette svaret, elevsvar 24, viser at eleven kan tegne en kasse. Videre viser det at vedkommende finner tre tall som multiplisert med hverandre blir et tall som har fem i seg. Riktignok uttrykker svaret at elevene ikke har et godt og riktig språk. Eleven må finne tre sider som *sammenlagt* blir 50 cm^3. Det kan selvsagt skyldes unøyaktig språkbruk, men det synes rart når vedkommende bruker multiplikasjonstegn i utregningen.
Eleven har også problemer med å gjøre om fra kubikkcentimeter til kubikkmeter.



Elevsvar 25

Denne eleven, elevsvar 25, tegner en kasse med sidekant 2 cm, men bringer inn målestokken 1: 250.
Jeg antar at eleven tenker rent praktisk. En kasse som skal romme 0,5 m^3 blir for stor å tegne på arket. Det kan synes som om eleven blir distrahert av oppgavens tekst.
Det ser likevel ikke ut til at eleven greier å fullføre resonnementet med målestokk. Sidekanten på kassen vil jo da bli 500 cm, og hvordan volumet da kan bli 0,5 m^3 er vanskelig å forstå. Mange svar er av denne type.
Videre viser det seg at omgjøring av volumenheter er et problem, her som i mange besvarelser. Her er det også et misforhold mellom lengdemål og kubikkmål.



Elevsvar 26

Elevsvar 26 viser kreativitet i sitt forsøk på å løse problemet. Grunnen til at eleven tar kvadratroten av 0,5 og ikke tredje rot av tallet, kan skyldes at eleven er uvant med problemstillingen og ikke behersker algoritmen for å finne tredje rot av et tall.
Ved prøving og feiling kommer eleven fram til et tilnærmet rett svar.
Eleven sier også at det er mange måter å løse oppgaven på. Eleven viser at han/hun er fleksibel når oppgaven løses.

Tabell 6.6 *Oppgave 16 – en sammenligning*

Oppgave 16	Allmenne fag i KIM - prosjektet		Klasse 1A	
	Antall	i prosent	Antall	i prosent
Ubesvart	59	20,6	4	17,2
Rett svar	61	21,3	13	48,3
Andre svar	167	58,1	12	34,5
Total	287	100	29	100

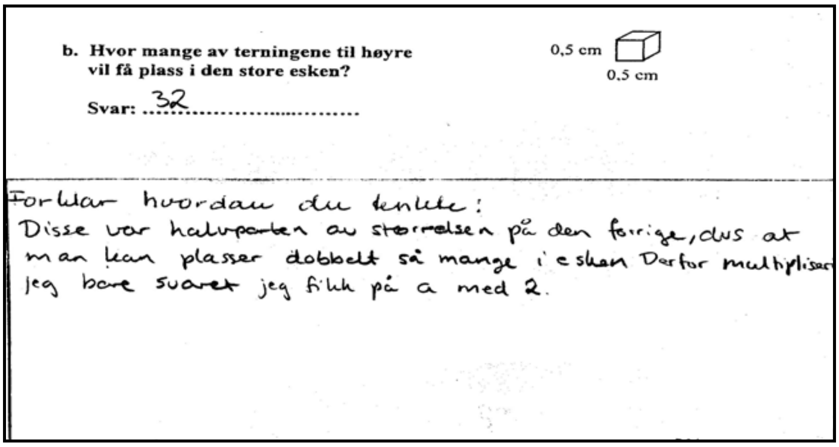
Ved sammenligning av resultatet for denne oppgaven viser at flere i klasse 1A kommer fram til rett svar og at flere løser oppgaven. I klasse 1A som i testen for øvrig, både blant elever på studieretning for allmenne fag og ellers, er det en stor del som ikke ser tilbake og prøver om

6.5 Volumbegrepet - dimensjoner

De diagnostiske oppgavene har vist at det oppstår problemer i volumbegrepet når en endrer dimensjoner. Jeg viser til de samme oppgavene her som i kapittel 5.8.4.
Også dette vil jeg belyse med noen elevsvar.

6.5.1 Hvor mange terninger med sidekant 0,5 cm får plass i den store esken?

Tabell 5.4 viser resultatet av oppgave 10 b) der kun 17,5 % får rett antall terninger. Nesten halvparten av elevene i testen dobler antall terninger det er plass til, når siden halveres. Elevsvar 27 er ett av mange eksempler på dette.


b. Hvor mange av terningene til høyre vil få plass i den store esken?

0,5 cm

0,5 cm

Svar: 32

Forklar hvordan du tenkte:
Disse var halvparten av størrelsen på den forrige, dvs at man kan plasser dobbelt så mange i esken Derfor multipliser jeg bare svaret jeg fikk på a med 2.

Elevsvar 27

Eleven sier at terningene med sidekant 0,5 cm er halvparten av terningene med sidekant 1 cm, og han/hun må doble antall terninger som får plass i esken.
Jeg ba en av elevene som svarte 32 terninger forklare utsagnet sitt nærmere.

"Jeg så bare på lengden av en side", var svaret jeg fikk.

Eleven hadde ingen problemer med å forstå hva hun hadde gjort feil da vi sammen studerte terningene nærmere. Det virket som om problemstillingen var ny og ukjent.

Resultatet fra KIM prosjektet viser at det 47,4 % som svarer at det er plass til 32 terninger i esken.

Forklar hvordan du tenkte:
Terningens volum er bare ¼ av terningen i forrige oppgave sin volum. Siden 16 var svaret i sistoppgave, multipliserte jeg bare 16 med 4.

Elevsvar 28

Denne eleven, elevsvar 28, sier at det blir plass til 64 terninger i den store esken. Vedkommende multipliserer svaret i 10 a), 16, med fire. 20,9 % av elevene i KIM prosjektet gir samme svar.

Elevsvar 29 gir samme svar, men her viser vedkommende utregningen. Volumet av den store esken beregnes korrekt. Eleven viser at det trengs tre dimensjoner, nemlig lengde, bredde og høyde. Når den lille terningens volum beregnes er det et misforhold i oppstillingen. Det vises to dimensjoner på venstre side av likhetstegnet, men det blir likevel cm^3 i svaret.
Nå viser figurene i oppgave 10 at de små terningene kun er forsynt med måltall langs to av sidene. Kan det være årsak til misoppfatningen?

Jeg spurte eleven om dette misforholdet.

Svaret var: *"Jeg setter bare på en benevning som passer"*

Underforstått: eleven reflekterte ikke over misforholdet.

Forklar hvordan du tenkte:

$2 \cdot 2 \cdot 4 = 16 cm^3$

$0,5 \cdot 0,5 = 0,25 cm^3$

$\frac{16 cm^3}{0,25 cm^3} = \underline{\underline{64 \text{ bokser}}}$

Elevsvar 29

En annen elev som ga samme svar, sa at han kun tenkte på den ene flaten, og så for seg fire enheter multiplisert med 16 terninger.

En tredje elev sa han hadde latt seg lure. Han mente han kanskje hadde tenkt annerledes dersom det hadde stått 0,5 cm ved den tredje sidekanten også.

Elevsvar 30 viser én måte å tenke på som gir korrekt svar. Elevene som skrev forklaring til oppgave 10 b), ga ulike forklaringer som ga rett svar.

Forklar hvordan du tenkte: Ved å gå fram som i forrige oppgave, fant jeg ut av det er plass til 8 av terningen til høyre i den lille esken øverst. Og siden det var plass til 16 av den lille esken i den store, multipliserte jeg 8 med 16, altså $8 \cdot 16 = \underline{\underline{128}}$

Elevsvar 30

Andre forklaringer på rett svar:

1) I den første går det fire terninger av den minste, altså $4 \cdot 8 \cdot 4 = 128$
2) Dobbelt så mange i bunn, høyde og bredde $4 \cdot 4 \cdot 8 = 128$
3) Det er plass til 8 av terningene til høyre i den lille terningen øverst. Siden det var plass til 16 av denne terningen i esken, må jeg multiplisere 8 med 16, altså $8 \cdot 16 = 128$
4) Jeg dividerte lengdemålene på den store esken med målene for den lille esken og multipliserte "de nye" målene med hverandre.
5) $\frac{2cm}{0{,}5cm} = 4, \frac{4cm}{0{,}5cm} = 8, \frac{2cm}{0{,}5cm} = 4$ og $l \cdot b \cdot h = 4 \cdot 8 \cdot 4 = 128$

Mens testen viste at 17,5 % svart rett på oppgave 10 b) i KIM - testen, var det i denne klassen på allmenne fag 26,9 % som svarte rett. Dette er et lite antall å forholde seg til, men denne prosenten er nær utfallet i testen for elever på allmenne fag, 23,3 %, og for elever på studieretning for musikk, dans og drama, 28,6 %, som vist i tabell 5.10.

Tabell 6.7 *Oppgave 10 b) – en sammenligning*

Oppgave 10b	Allmenne fag i KIM-prosjektet		Klasse 1A		Klasse 1B	
	Antall	i prosent	Antall	i prosent	Antall	i prosent
Ubesvart	6	2,1	0	0	0	0
Rett svar (128)	67	23,3	14	48,2	9	34,6
64 terninger	81	28,2	9	31,0	7	26,9
32 terninger	107	37,3	6	20,7	6	23,0
Andre svar	26	9,1	0	0	4	15,4
Total	287	100	29	100	26	100

Tabell 6.7 viser samme tendens som ved andre sammenligninger av svar på oppgaver. Her har klasse 1A det beste resultat. Det stemmer godt overens med mitt totale inntrykk av klassene 1A og 1B. At disse klassene gjør det bedre enn i KIM – prosjektet kan igjen forklares ved at det kun er primærsøkere til klassene og at prøvesituasjonen nok er mer avslappet.

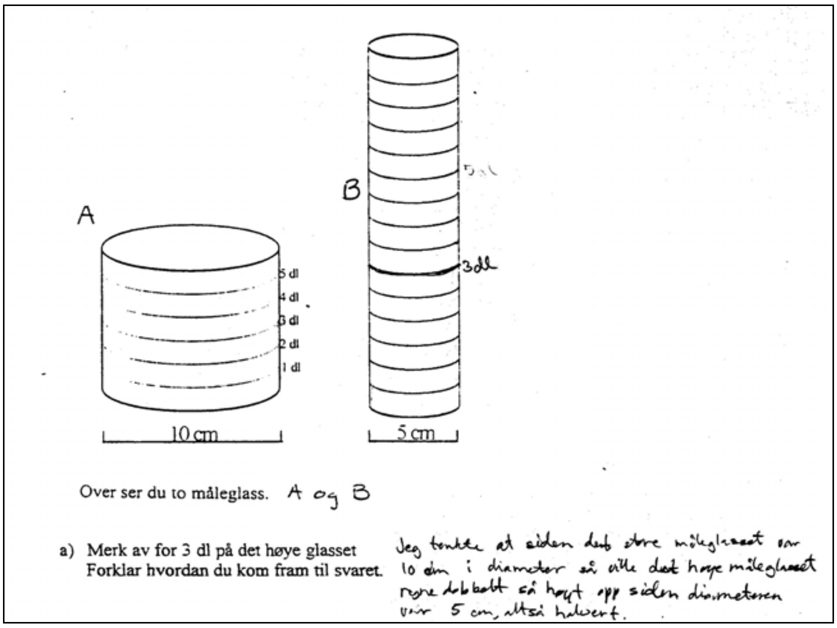
6.5.2 Måleglasset – sett av merket for 3 dl

Måleglasset i oppgave 20 a) viste seg å være et problem for storparten av elevene. I KIM-prosjektet var det kun 3,4 % som merket av for 3 dl på rett sted. Jeg viser noen elevsvar fra egen skole der elevene ble bedt om å forklare hvordan de tenkte.

Elevsvar 31 er et typisk svar fra ca 60 % av elevene i den diagnostiske testen, og viser at elevene har misoppfatninger i forholdet mellom lengdemål og hulmål.

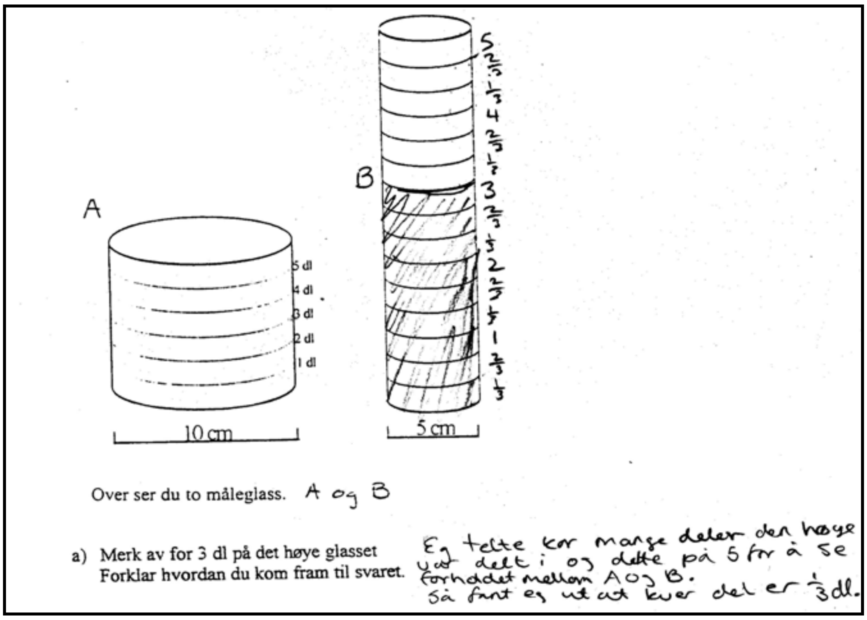
> *"Når en halverer diameter, må høyden dobles"*

er et utsagn som går igjen.
Andre sier at arealet av bunnen av måleglass A er dobbelt så stor som arealet for bunnen av måleglass B, og så dobler de høyden i glasset til høyre.



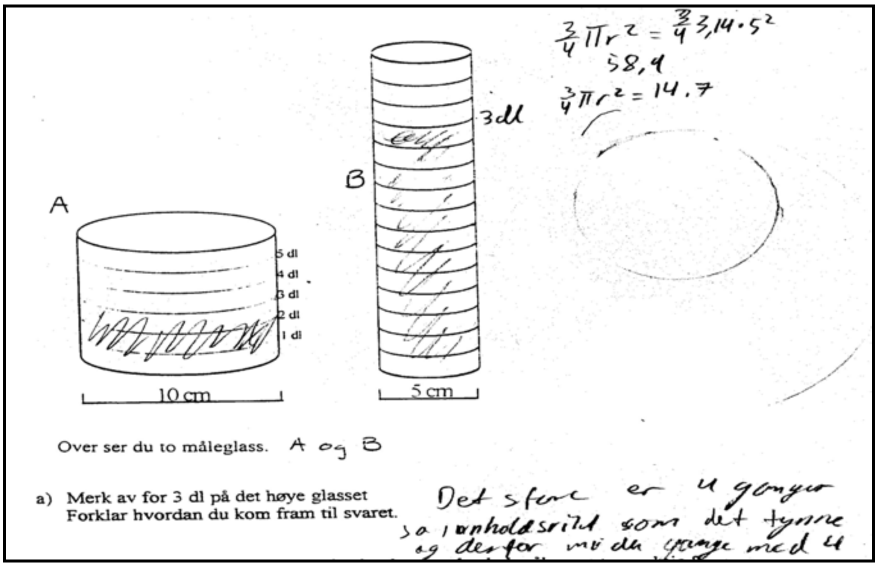
Elevsvar 31

Elevsvar 32 viser en slags forholdsregning mellom de to måleglassene. Måleglass B er delt opp i 15 deler, og eleven mener måleglass A er delt opp i 5 deler. Det siste skyldes antagelig at det er skrevet 5 dl ved den øverste delen. Jeg tolker dette svaret dit hen at eleven tror at de to måleglassene skal romme det samme. Denne eleven og mange andre legger mer i figuren enn det som er tiltenkt. Deretter finner han/hun forholdet mellom antall deler, og overfører forholdet til rom mål. Figuren i seg selv skaper misoppfatninger, og mange svar viser begrenset oppfatning av volumbegrepet.



Elevsvar 32

Elevsvar 33 viser feil formel for volumet av sylinderen, men viser ellers forståelse for dimensjoner. Eleven beregner, og kommer til at måleglass A er fire ganger så innholdsrikt som måleglass B, radius tatt i betraktning.
Andre elever kan formel, setter rett radius inn i formelen, men greier likevel ikke å fullføre oppgaven. Noen elever forveksler grunnflatesirkelens areal med dens omkrets.



Elevsvar 33

Tabell 6.8 *Oppgave 20 a) – en sammenligning*

Oppgave 20a	Allmenne fag i KIM - prosjektet		Klasse 1A	
	Antall	i prosent	Antall	i prosent
Ubesvart	24	8,4	0	0
Rett svar (12. delestrek)	13	4,5	3	10,3
6. delestrek	179	62,5	21	72,4
Andre svar	71	24,7	5	17,2
Total	287	100	29	100

Oppgave 20 a) var dissidert den oppgaven elevene i KIM - prosjektet hadde størst problemer med å løse. Klasse 1A har et bedre resultat på oppgaven, men ligger likevel langt etter resultatet for studieretning for naturbruk som tabell 5.11 viste. Mellom ca 50 til 80 % av elever i alle studieretninger setter merket på 6.delestrek.

6.6 Oppsummering

Jeg har i dette kapitlet sett på noen elevbesvarelser fra egen skole på oppgaver fra testen som måler volumforståelse samtidig som oppgavene kan oppfattes som uvante og til dels som problemløsingsoppgaver.
Elevene gikk grunnkurs i studieretning for allmenne fag 00/01, (1A), henholdsvis 01/02,(1B). Svarene er representative for undersøkelsen i KIM - prosjektet som ble foretatt i januar 2000 blant 650 elever fra alle grunnkurs i videregående skole og kan derfor brukes i denne oppgaven for å få en forståelse av hvordan elever løser volumoppgaver av forskjellige typer.

Elevsvarene som er tatt med, viser hvordan elevene tenker i utvalgte oppgaver.
Jeg har sett på oppgaver som jeg har delt inn i fire ulike kategorier:

- Oppbygging av volum.
- Volum – overflate.
- Volumbegrepet – oppfatning av størrelser.
- Endring av dimensjoner.

6.6.1 Oppbygging av volum

Elevsvarene viser god grunnleggende volumforståelse. Det går greit å fylle opp esken med terninger som i oppgave 10 a) og å finne antall terninger som skal til for å bygge opp Sigrids kloss som i oppgave 12.
Noen få elever multipliserer feil eller tolker figuren feil, og for mange må det kunne tilskrives slurv.

En del elever viser at de bygger opp volumet lagvis, enten fra bunnen og opp eller motsatt, eller fra framsiden og bakover eller lignende. De fleste i disse to klassene bruker formel for å finne svaret. Enda flere ville brukt formel om jeg ikke hadde oppfordret dem til å forklare hvordan de tenkte.

6.6.2 Volum – overflate

Rettsvar - frekvensen synker når elevene i klassene 1A og 1B skal finne hvor mange fliser som må til for å dekke boksen i oppgave 17. Det ser ut til at det er mindre vanlig å beregne overflaten av et legeme enn å beregne volumet. Det virker underlig, men det er hva noen av elevene fortalte meg. Andre gjør nok feil fordi de er svært formelfokusert, og terningen/eskens volum er den formel som de lettest henter fram fra hukommelsen. Begrepene volum og overflate burde være klare nok, men elevene reflekterer ikke over problemstillingen i oppgave 17.

6.6.3 Volumbegrepet – størrelser

Jeg har tatt for meg tre av oppgavene som tar for seg størrelser elevene skal ta stilling til. Det er oppgavene 11, 18 og 16, i denne rekkefølgen.
Elevene har minst problemer med oppgave 18. Over halvparten av elevene krysser rett av for størrelse til en voksen mann. Likevel er det å merke seg at det er forslag både på 7 dm^3 og 7 m^3 . Det tyder på at mange ikke har forestilling om, ei heller reflekterer over disse størrelsene.
En merker seg også problemet med å gjøre om fra en volumenhet til en annen. Dette er ikke noe nytt, men en undrer seg stadig over denne vanskeligheten.

Å få fire personer inn i en kasse på 1 m^3 er et større problem. For de fleste elever er 1 m^3 en terning med 1 m lange sidekanter. Da får de et problem, og de kan ikke se for seg personer inn i kassen uten at det er barn eller slangemennesker som skal inn i den.

En skulle tro at dersom oppgave 18 kom før oppgave 11 ville flere svare rett på oppgave 11. Jeg prøvde ut dette på 27 av elevene i klasse 1B, men det falt ikke ut som forventet. Det ser ut til at rekkefølgen av oppgavene i en test som dette, spiller liten rolle. I en annen opplæringssituasjon, der målet er å utforske legemers størrelser og sammenheng mellom dem, ville resultatet blitt annerledes.
Elevene er svært rigide i sin oppfattelse av hvordan en kasse på 1 m^3 ser ut.

Det viser seg også at det er vanskelig å tegne en kasse på 0,5 m^3 og sette på mål. Fire av de 29 elevene i klasse 1A hadde ikke gjort forsøk på å tegne kassen, mens to hadde satt strek over det de hadde tegnet. Tre mente de trengte flere opplysninger for å kunne gjøre oppgaven, mens sju hadde tegnet, men satt på feil mål.
Her er problemet at elevene ikke prøver tallene de bruker for å se om de får rett svar. For mange blir vanskeligheten å utføre beregning med desimaltall, (se 6.4.3).

De tre oppgavene som er kommentert her, er nok alle uvante oppgaver som elevene ikke har en present løsningsstrategi på. Det tyder på at brukes lite problemløsningsoppgaver i matematikkopplæringen.

6.6.4 Volumbegrepet – dimensjoner

En stor del av elevene i klassene 1A og 1B gjorde feil når esken i oppgave 10 skulle fylles med terninger med sidekant 0,5 cm. Det opprinnelige antall terninger i oppgave10 a) ble multiplisert med henholdsvis to eller fire av til sammen ca.50 % av elevene.

Noen sier de ble lurt fordi det sto 0,5 cm ved to av sidekantene på den lille terningen og ikke ved den tredje.

Andre tenkte forminsking av terningen, men kun i en eller to retninger, og at det fikk konsekvenser for hvor mange terninger det blir plass til i en terning med sidekant lik 1 cm.

Oppgave 20 a) var et enda større problem. Foruten at det også her var forandring av dimensjoner av måleglassene, var også grunnflaten en sirkelflate. 72,4 % av elevene i klasse 1A satte merket for 3 dl på det høye måleglasset på 6. delestrek. De tenkte kun i en dimensjon: når diameter halveres, må høyden på væsken dobles.
Elevene har begrensede oppfatning av dimensjoner – en misoppfatning som kommer tydelig fram her.

6.6.5 Sammendrag

Elevsvarene fra klassene1A og 1B i påfølgende skoleår 00/01 og 01/02, viser at volumforståelsen er velutviklet hos de fleste inntil et visst punkt.

Noen svarer feil når de skal beregne antall fliser som trengs når de skal dekke boksen i oppgave 17. Det er mye som er tilfeldige feil og manglende refleksjon. de er ikke vant med å beregne overflaten av et legeme.

Flere har problemer med størrelser de ikke er vant med å forestille seg eller bruke, f eks 1 dm^3 og 1 m^3 . Mange gjør feil ved omgjøring av benevning, noe som skaper hindringer i å finne rett svar.

En kasse på 1 m^3 kan kun være $1m \cdot 1m \cdot 1m$ for svært mange.

Å finne hva sidekantene i en kasse må være når den skal romme 0,5 m^3 , er for mange et stort problem.
Elevene mangler praktisk erfaring med slike størrelser, og har ikke oppøvd evnen til å sammenligne størrelser.

Mange strever med hvilken konsekvens forandring i én lengde vil ha å si for de andre størrelsen når volumet skal bevares.
Spesielt ble det vanskelig å finne hvor høyt vannet ville stå når måleglassets diameter ble halvert. Det ser ut til at elevene mangler øvelse i slike praktiske gjøremål som å helle vann fra en beholder til en annen.

Generelt kan problemene med disse oppgavene være at elevene ikke har prøvd seg på tilsvarende oppgaver i matematikkopplæringen. Det vil ikke være vanskelig å få elevene i 1A og 1B til å kvitte seg med sine misoppfatninger, og til å få en dypere forståelse for volumbegrepet med alle de dimensjoner det omfatter. Oppgaver eller problemstillinger som krever refleksjon og samtale vil bringe dem videre.

Kapittel 7 Funn

7.1 Innledning

Dette kapitlet vil handle om de funn jeg har kommet fram til vedrørende problemstillingen:

"Volumforståelse hos elever på grunnkurs i videregående skole."

Resultatene fra klassene 1A og 1B på utvalgte oppgaver fra KIM – prosjektet er allerede sammenlignet med resultatet for elever fra studieretning for allmenne fag i kapittel 6. Jeg vil ta resultatene opp igjen i dette kapitlet, men se det i sammenheng med det totale resultatet fra KIM –undersøkelsen når det gjelder volumforståelse. Samtidig vil jeg vise til teorier som beskriver hvilke vanskeligheter elever har innen dette området i matematikk.

7.2 Oppbygging av volum

Resultatet fra KIM - prosjektet, januar 2000, viser at 25 % av de 650 elevene ikke greier enkle volumberegningsoppgaver som 10 a) og 12. Her måles grunnleggende forståelse av volumbegrepet.
I oppgave 10 a) skal en fylle esken med enhetsterninger; da må en kunne forestille seg et hulrom som skal fylles med terninger.

I oppgave 12 skal en bygge opp en kloss av terninger. Klossen vil oppta plass som vil være et ytre volum, selv om spørsmålet er hvor mange terninger som brukes.

Tabell 6.1 viser at klassene 1A og 1B viser høyere frekvens av " rett svar" på oppgave 10 a) enn elever fra studieretning for allmenne fag i KIM - undersøkelsen. I dette materialet ser en at elever fra studieretning for musikk, dans og drama gjør det best (tabell 5.12, s.65). KIM data i tabell 5.3 s.53 viser at 75,1 % av 650 elever svarer rett på oppgaven.

Tilnærmet samme resultat får en ved å studere oppgave 12 på tilsvarende måte.

Hva er så problemet for elever som ikke svarer rett på disse to oppgavene?

Etter D.Kerslake (1976) kan en tenke seg at begrepet volum kan forstås på to måter:

- Indre volum: et hulrom med en hvis kapasiteten, målt i passende enheter: vanligvis kubikkcentimeter, som når man måler et fast legeme.
- Ytre volum: hvor mye plass et legeme opptar i forhold til andre legemer.

Kerslake kaller det indre volumet for legemets kapasitet: Å fylle et hulrom med noe….å fylle esker med bokser….bruke væsker eller fritt flytende materiale som sand… fylle en kopp med te (Dickson et al, 1984).

Kerslake hevder videre at ytre volum er en "skole" sak og ikke særlig realistisk utenfor klasserommet. Hun sier at dette fører til en situasjon der elevene blir forutinntatt til å beregne volum ved å lete etter en passende formel eller en regneoperasjon uten å forstå hvordan formelen er oppstått eller at de har noen sund begrepsmessig oppfatning av volum.

Kerslake mener at forvirringen mellom formler for å finne overflate og volum av en sylinder er et bevis for dette.

Det er flere av elevene som greier oppgave 10 a) bedre enn oppgave 12 som tabell 5.4 og 5.6 (sidene 55 og 57) viser. Det kan tyde på at volumforståelsen er større når en skal fylle esken (indre volum) enn når en skal bygge opp esken (ytre volum).

Kerslake fremhever at i praktiske, daglige gjøremål, er det å fylle eller å delvis fylle noe, i trå med de erfaringene en gjerne gjør. Dette er erfaringsviten som er i overensstemmelse med resultatet i denne undersøkelsen.

En CSMS[6] – undersøkelse (Hart,1980,1981), der 12-14-åringer skal ta stilling til ”indre” volum av en boks og ”ytre” volum av et legeme, kommer derimot til at det ikke er noe bevis for at ”indre” volum er enklere å forstå enn ”ytre” volum (Dickson et al,1984, s.136).

I den nasjonale KIM - undersøkelsen er det ca.10 % flere som svarer rett på oppgave 10 a) enn på oppgave 12. Kerslakes teori har muligens noe for seg, men på dette aldertrinnet tror jeg ikke at elevene ville forstyrres av et indre eller et ytre volum. Jeg tror heller at illustrasjonene i de to oppgavene er avgjørende for resultatet. Det er lettere å få en forståelse for hvor mange terninger som får plass i esken i oppgave 10a) enn hvor mange terninger som må til i oppgave12.

Dette prosjektet viser også at elever bygger opp volum på ulike måter. Noen bygger det opp lag forlag, enten i høyden eller i bredden (dybden). Andre bruker formel ved beregning av volum. Bruk av formel for beregning av volum, vil etter hvert bli beregningsmåten som dominerer når elevene blir eldre.

En del av svarene som er feil vil nok skyldes at elevene tolker figurene i 10 a) og 12 feil, dvs. at de teller feil. Andre skyldes tilfeldige regnefeil, mens en hel del av elevene blander sammen volum og overflate.

7.3 Volum – overflate

Resultatet fra oppgave 17 i KIM – dataene viser at det er ca. 20 % som regner ut volumet av boksen som skulle flislegges i stedet for å regne ut overflaten. 16,9 % besvarer ikke oppgaven, og det er kun 20,8 % som svarer rett.
I KIM –prosjektet er resultatet noe bedre for elever fra studieretning for allmenne fag enn for andre studieretninger, mens elever i klassene 1A og 1 B gjør det vesentlig bedre (Tabell 6.3, s.57).
I oppgave 12 teller/beregner mange elever synlige terninger når de skal finne volumet.
Det er vanskelig å ha noe oppfatning om elevene tenker volum eller overflate. En del elever har nok mangler nok en klar oppfatning av begrepene volum og overflat. Forvirringen kan skyldes at elevene kun tenker formler. Det vil være nyttig å lage 3-dimensjonale legemer av papir for å se sammenheng mellom flater og volum. Mange elever viser misoppfatning om dette forholdet.

[6] CSMS: Concepts in Secondary Maths and Science (Hart, K.M. 1981)

Mange elever har også problemer med å se hvor mange flater som skal være med i beregning av boksens overflate.

Weinzweig (1978) viser til at barns første erfaring med rommet, er med 3-dimensjonale figurer. Først senere blir en bevisst på flater, da som overflaten av legemer som kuber, kjegler, sylindere osv., og han gir råd om aktiviteter som kan gjøre barn bevisst på dimensjoner av figurer (Dickson et al,1984, s.22).

Dickson et al, (1984) refererer i "Children learning Mathematics" til flere forskere som har studert barns romlige evne, blant andre til K. Fuson som sier

> "*Projections are a common experience in the life of a child. Discovering the invariance of a 3-dimensional object as it is seen from different viewpoints is a major accomplishment. Building up images of three dimensional objects when one can never see them from more than one viewpoint….at a time is a long and difficult task".*

I samme bok refereres G. Lappan og M.J.Winter, (1979) :

> *"In spite of the fact that we live in a 3-dimensional world, most of the mathematical experiences that we give our children are 2-dimentional. We use 2-dimentional books, containing 2-dimentional pictures of 3-dimentional objects, to present mathematics to our children. Surely this use of "pictures" of objects introduces (for the child) another difficulty in the process of understanding. Yet it is necessary that children learn to cope with 2-dimensional representation of the world…."*

Referansene sier noe om at legemers eller figurers dimensjoner er vanskeligere å forstå enn vi tror.
Det kan tenkes at barn får for liten erfaring med å arbeide med sammenhengen mellom 3-dimensjonale legemer og deres overflate. Denne manglende erfaring kan føre til at elevene opp igjennom skoletiden blir altfor formelfokusert; slik også i oppgave 17 der mange kun tenker formler, og prismets volum er den mest nærliggende formel.

Likevel vil jeg hevde at elever i en alder av 16 år, skulle ha gjort så mange erfaringer at de burde kunne skille mellom volum og overflate. Når elvene i KIM – prosjektet beregner volum i stedet for overflate eller motsatt, tror jeg ikke det skyldes vanskeligheter med å se for seg de tre dimensjonale figurene selv om de tegnes to dimensjonalt. Jeg tror at mye skyldes at de ikke reflekterer nok på problemstillingene.

Dersom elever i denne alder har problemer med å vite når og hvordan de skal beregne volum og overflate, tror jeg de lett med adekvat undervisning kan få bukt med denne type misoppfatning.

7.4 Volumbegrepet – oppfatning av størrelse

KIM - undersøkelsen viser at elever har vage forestillinger om størrelser, hvor stort "noe" er og hvordan "noe" ser ut.
Mange elever har vanskeligheter med omgjøring av benevninger. Det kommer til uttrykk i flere oppgaver, og for en del elever er det årsaken til feil svar.

7.4.1 *Hvor stort er 1 m^3 ?*

Resultatet fra oppgave 11 viser at elevene hadde vanskeligheter med størrelsen 1 m^3 . Hvor stort er ”noe” som er 1 m^3 ?

KIM – dataene viser at 18,5 % kommer fram til rett svar. Tabell 6.4 s.80 viser at elever fra studieretning for allmenne fag i KIM – prosjektet har en lavere *rett svar* frekvens, mens klasse 1A gjør det mye bedre. På denne oppgaven er resultatet for elever fra studieretning for elektrofag det enda noe bedre (35,6 %), og elever fra studieretning for byggfag kommer like etter (33,3 %).

Det ser ut til at 1 m^3 er en størrelse som elevene har liten eller ingen praktisk erfaring med i fra matematikkundervisningen. Det er kun når en skal gjøre om benevninger at en bruker størrelsen . I boka si tegner de sjelden figurer som har en lengde på mer enn 10 cm. Riktignok gjør de nok erfaringer ellers i livet med lengder som er mer enn 10 cm. Da er det i praktiske situasjoner som sjeldent har med matematikkfaget å gjøre.
I oppgaven 11 skal elevene forholde seg til tre dimensjoner, noe som gjør situasjonen spesielt vanskelig.

Undersøkelser fra Amerika, NAEP[7], og Stor Britannia, APU[8], viser at elever har problemer med metersystemet, (Dickson et al, 1984).
Den første APU - undersøkelsen viste at mens 70 % av 11-åringer valte 2 m som en sannsynlig høyde for en mann, valte 80 % av 15-åringene det. De hadde følgende valgmuligheter: 2 m, 20 m, 200 m og 2000 m.
En annen APU - undersøkelse viste at 20 % av11-åringene og 15 % av 15-åringene ikke valte 1 m for høyden på et bord når de hadde valget mellom 10 mm, 1 cm, 10 cm og 1 m.

I dette KIM - prosjektet er elevene rundt 16 år. Problemstillingen i denne oppgaven involverer tre dimensjoner og er betydelig vanskeligere enn i eksemplet over. Det er vanskelig å si hva en kan forvente på denne problemstillingen. Elever fra noen yrkesfaglige studieretninger gjør det best på denne oppgaven. Det kan tyde på at de tenker mer praktisk enn elever fra de studieforberedende studieretningene.

7.4.2 *Volumet av kroppen til en voksen mann.*

Resultatet fra oppgave 18 viser at ca. 50 % av elevene i KIM - prosjektet svarer rett. Resultatet fra klasse 1B og fra elever fra studieretning for allmenne fag (KIM) har litt bedre resultat.
Alle grupper greier denne oppgaven vesentlig bedre enn oppgave 11.

Det tyder på at elevene har noe å relatere størrelsen til. Den blir mer virkelighetsnær og de greier å gjøre et overslag. Følgelig blir resultat bedre.

Dette er i overensstemmelse med Carpenter et al., (1980):

---

[7] NAEP: National Assessment of Educational Progress (1980) Mathematical Technical Report: Summary Volume
[8] APU: Assessment of Performance Unit (1980b), Department of Education and Science, Primary Education in England

> *"Furthermore for a child to employ a unit of measure in an appropriate way he must have some idea of and some feeling for what it actually represent. This enables him to estimate, or to judge whether a particular measure is reasonable….."*
>
> (Dickson et al,1984, s.90)

Resultatet for oppgavene 11 og 18 viser at når elevene forbinder problemstillingen til noe praktisk, og ikke bare til faget matematikk, gjør de det vesentlig bedre. En praktisk tilnærming til oppgavene er altså av stor betydning.

7.4.3 Hvordan ser en kasse på 1 m^3 eller 0,5 m^3 ut?

I oppgave 11 viser det seg at elevene har en svært rigid oppfatning om hvordan en kasse på 1 m^3 kan se ut. For svært mange er 1 m^3 det samme som, $1m \cdot 1m \cdot 1m$ og andre muligheter ser de ikke. Denne oppgaven byr på en uvant problemstillingen, og elevene reflekterer ikke over at en annen form på kassen kunne gi en annen løsning på oppgaven.

Det viser seg også problematisk å tegne og sette mål på en kasse som skal romme 0,5 m^3 som i oppgave 16. Kun 12,8 % svarer rett, mens 25,7 % ikke har besvart oppgaven, (Tab.5.9, s.61). Elever fra studieretning fra allmenne fag gjør det noe bedre (21,3 %) og elever fra klasse 1A har en "rett svar" frekvens på 48,3 %.
For mange er det et problem å tegne i perspektiv, 10 % greier ikke det (KIM). Mange har problem med å finne tre tall som multiplisert med hverandre gir svaret.
Andre har problemer med å gjøre om benevninger.

Det kan synes som om elever i daglige gjøremål har lite behov for å måle størrelser for å se om det blir plass til ulike ting eller hvordan en må innrette seg for å få dette til. De utfører praktiske handlinger, men da med prøving og feiling. I vår kultur er alt tilrettelagt i stor grad, og tidligere tiders problemer ved bruk av uensartede mål, eksisterer ikke for folk flest. Det kan være noe av årsaken til at disse to oppgavene faller vanskelige for elevene. En annen grunn kan være at elevene sjelden eller aldri lager illustrasjoner når de skal løse oppgaver. Jeg mener at det vil være en svært god hjelp.

7.4.4 Omgjøring

I flere av oppgavene i KIM - testen viser det seg at elevene har vanskeligheter med omgjøring av enheter. Dette er også tilfelle blant elevene i klasse 1A og 1B ved egen skole.
Dette medfører igjen at det blir svart feil, som f. eks. når 360 dm^3 blir til 3,6 m^3 i oppgave18.

Elevens konklusjon blir at volumet av en voksen manns kropp ligger nærmere 7 m^3 enn 70 dm^3. De reflekterer heller ikke over dette svaret som er hinsides alt. Det kan forstås når de ikke har et forhold til størrelsen 1 m^3 .

Oppgave 13 (vedlegg 1 og tabell 5.3 s.53) er en annen oppgave som viser at omgjøring av enheter er et problem. Bare 17,1 % svarer rett når elevene blir bedt om å krysse av for måleenheter som er identisk med 0,5 l. Her skal elevene vise om de kan sammenhengen innen metersystemet og mellom metersystemet og andre former for hulmål.

En APU - undersøkelse fra 1978 viser at blant 15-åringer visste 77 % at 1 m = 100 cm, og 50 % visste at 1 mm = 1/10 cm.
Når elever har problemer med å gjøre om lengdemål, må problemene bli desto større når det gjelder flatemål og hulmål. Det viser også KIM - prosjektet.

Elever i norsk grunnskole lærer å gjøre om enheter fra 4. klasse (M 87), og de arbeider sikkert mye med stoffet. Det viser læreverket jeg har sett på. Når de kommer til videregående skole og fremdeles har vanskeligheter med omgjøring av enheter, vil jeg påstå at det er noe gale i undervisningen. Dersom opplæringen foregår ved at elevene sitter og arbeider alene, og løser mange oppgaver av samme slag, ofte isolert fra virkeligheten og uten å snakke sammen, vil mange ikke ta kunnskapen inn over seg. Når de senere støter på matematikkproblemer hvor det kreves at de har oversikt og ser sammenhenger i målesystemene, greier de det ikke.
Når elevene blir eldre og på nytt arbeider med omgjøring i videregående skole, vil de fleste oppfatte og forstå sammenhengen mellom måleenhetene. Det vil alltid være noen som trenger mer tid enn andre.

7.5 Endring av dimensjoner

Oppgavene 10 b) og 20 a) viser at endring av dimensjonen for enhetsterningen eller endring av diameter i måleglasset skaper store problemer.

Noe av det dårlige resultatet kan sikkert tilskrives at svarene skulle avgis raskt slik at elevene ikke fikk tid til å tenke seg om. Likevel er det et svakt resultat for begge oppgavene. Det er å bemerke at elever fra noen studieretninger gjør det vesentlig bedre på oppgave 20 a) enn andre, og da spesielt elever fra enkelte yrkesfaglige studieretninger.

7.5.1 Endring i enhetsterningens dimensjon

Tabell 5.3 (s.53) viste at mens 75,1 % i KIM - prosjektet fant at det var plass til 16 terninger i esken når enhetsterningens volum var 1 cm^3, var det kun 17,5 % som svart rett, 128 terninger, når enhetsterningens volum ble 0,5 cm^3. 23,3 % av elever fra studieretning for allmenne fag (KIM) svarte rett og for klassene 1A og 1B var tilsvarende tall 48,2 % og 34,6 %. Nesten 50 % dobler antall terninger som trengs (KIM). I KIM - prosjektet svarer 28,6 % elever fra studieretning for musikk, dans og drama rett , mens tilsvarende tall for elever fra studieretning for elektrofag er 26,8 %.

Elevsvar 27 (s.86) gir som forklaring på hvorfor en trenger 32 terningen med side 0,5 cm at hun må doble antall terninger som får plass siden terningens side blir halvert. Mange har sikkert gitt dette svar av samme grunn, uten å tenke at terningen halveres både langs høyde, lengde og bredde. Mange av elevene som har gitt et svar som dette, vil ikke ha noen vanskeligheter med å forstå hvordan en skal tenke dersom de hadde fått litt veiledning. Antagelig er det en problemstilling som er ny og uvant.

20,9 % (KIM) multipliserer 16 terninger med 4. Mange elever har nok sett at det står måltall og benevning ved kun to sider i oppgaven, og derfor latt seg "lure". Når den opprinnelige esken er gitt med tre dimensjoner, burde de også ha tiltenkt enhetsterningene tre dimensjoner.

Resultatet fra oppgave 10 b) viser at det er vanskeligere enn vi tror å ha en solid oppfatning og forståelse av å finne volumet av et legeme, og her spesielt å forstå hvordan enhetsterninger av forskjellige dimensjoner bygger opp volum.

En NAEP undersøkelse fra USA (Carpenter et al,1980) fant at de fleste 13 og 17-åringer var kjent med grunnleggende målebegreper og ferdigheter som inneholdt én dimensjon, nemlig lengdemål. Mange hadde ikke grunnleggende begreper når det gjaldt areal og volum. Det var en tendens til å bruke uten att lærte formler, og selv disse kunne ikke brukes på relativt enkle problemer (Dickson et al.,1984, s.86).

7.5.2 Endring av måleglassets dimensjon

Tabell 5.2 (s.51) viste at oppgave 20 a) falt svært vanskelig der kun 3,4 % fant rett svar. Når måleglassets diameter blir halvert, konkluderer storparten av elevene at vannets høyde vil stige. De ser at for å få samme vannmengde, for å konservere volumet, må de merke av høyere oppe på det smale måleglasset. Ca. 60 % merker av på 6.delestrek. Igjen er nok tanken at når en dimensjon halveres, må en annen dobles. Det er mange likelydende argumenterer. Elevene har ikke full oversikt over situasjonen ved å konservere volumet i måleglasset.

Det er mange forhold som spiller inn her:
Å konservere volum av en væske, som ikke har noen fast form, er vanskeligere enn tilsvarende for et fast legeme.
Tverrsnittet av måleglasset er sirkelformet og det gjør det vanskelig å se for seg hvilken innvirkning det vil få når diameter halveres.
Det er også vanskeligere å regne ut høyden i måleglasset dersom en forsøker på det. Mange elever kan ikke formelen for arealet av grunnflaten i måleglasset. En del som kan formelen, regner feil. Andre henger seg opp i at de ikke kjenner formel for volumet av en sylinder. Da gir de opp.
Det kan også være et problem at måleglassets diameter er gitt i cm, mens volumet er i desiliter.

Piaget,(1952) og Rothwell Hughes,(1979) har vist at barn generelt har en tendens til å bedømme mengde bare ut fra én dimensjon, vanligvis høyde (Dickson et al, 1984, s.138).

Oppgave 20 a), (tabell 5.10 s.47) viser at det er 2,8 % som merker av for 3. delestrek når de skal merke av for 3 dl. Disse elevene mangler evnen til å konservere væske.
Resten av svarene gir uttrykk for at elevene vet at høyden på væsken vil stige i det smale måleglasset, men ca. 50 % setter altså merket ved 6. delestrek.

7.6 Oppsummering

Denne undersøkelsen i KIM - prosjektet viser at elever i grunnkurs i videregående skole ikke har den forståelse og kunnskap innen området Måling og enheter som en skulle ønske.
Jeg har spesielt sett på elevenes volumforståelse. Den er langt fra solid for manges vedkommende. Spesielt er det problemløsingsoppgaver eller oppgaver som er uvante som volder problemer. Svarfrekvensen er også lavere på uvante oppgaver enn på andre oppgaver.

Det som har kommet fram i denne undersøkelsen, kan kort oppsummeres slik:

En del elever skiller ikke mellom volum og overflate.
Andre har problemer med å kvantifisere noe. Hvor stort er 1 m^3 ? Mange elever er ikke vant med å forta en praktisk vurdering av størrelsen.

Igjen andre er svært rigide i sin oppfatning av størrelser. 1 m^3 er $1m \cdot 1m \cdot 1m$, og kun det.

Å finne lengden av sidene i en kasse som skal romme 0,5 m^3 er også et problem. Mange mangler evnen til å prøve og feile, andre greier ikke å se for seg en tredimensjonal kasse og tegne den. En del tester ikke svaret sitt.

Mange har problemer med å gjøre om enheter. Det kommer også fram i andre oppgaver enn de som er behandlet her.

Endring av dimensjoner i tredimensjonale legemer, blir et problem for svært mange elever.

Mens resultatene jevnt over er bedre for elever fra studieretningene allmenne fag og musikk, dans og drama, er det noen oppgaver elever fra andre studieretninger gjør det best på.

Elever fra studieretning for naturbruk gjør det best på oppgave 20 a): Måleglasset.

Elever fra studieretningene mekaniske fag og byggfag gjør det best på oppgave 11: Er det plass til 4 personer i en kasse med volum 1 m^3 .

Det kan se ut at elever fra yrkesfaglige studieretninger har erfaringer av ulik art som de kan bruke når de løser oppgaver av mer praktisk karakter.

Undersøkelsen viser også at elevenes volumforståelse ikke endrer seg vesentlig fra 9. klasse til grunnkurs i videregående skole. Det viser i hvert fall oppgave 20 a), måleglasset, der jeg sammenligner med oppgave 16 i test I i KIM – prosjektet 1997 (Nortvedt 1998).

Det ser også ut til at rekkefølgen av oppgaver i en diagnostisk test som denne, spiller liten rolle. Det vil sannsynligvis bli annerledes dersom oppgavene er en del av et til rette lagt læringsforløp.

I M 87 var Måling og enheter og Problemløsing hovedemner. Læreboka ”min matematikk” som jeg har sett på, har tatt læreplanens mål på alvor. Til tross for dette viser undersøkelsen at det er mange problemområder i elevenes volumforståelse, og ganske sikkert innen andre hovedemner i matematikk.
Dersom jeg skulle forsøke å forklare elevenes manglende kunnskaper og forståelse i matematikk ut fra de erfaringer jeg gjort gjennom mange år, vil jeg si at læreplanen er for omfattende når målet er å bygge opp en god og varig forståelse i matematikk.

Vi har en skole der alle elever skal gå, og i en klasse finner en barn med svært ulike evner og motivasjon. Selv om intensjonen er at alle skal få tilpasset opplæring, skal det noe til å få det til i praksis. Elevene vil oppnå forståelse på ulike tidspunkt.
Jeg vil også påstå at lærebokforfatterne og lærerne overvurderer elevene evne til å forstå formler. Formlene blir pugget og brukt ukritisk, og elevene selv, samt lærerne tror matematikken er forstått.

Teorier som baserer seg på forskning innen matematikkopplæring, viser at vi lærer på forskjellig måte. De fleste må selv bygge opp, konstruere, sin egen kunnskap. Da må forholdene legges til rette for at det skal skje i et godt læringsmiljø der det finnes aktiviteter som motiverer til læring og forståelse.

7.7 Avsluttende kommentarer

Denne hovedoppgaven tar for seg volumforståelse blant grunnkurselever i videregående skole.
Elevene som har vært med i undersøkelsen har fulgt M 87 gjennom hele skolegangen. Resultatet av undersøkelsen viser at elevene har endel vanskeligheter med oppgaver som skal måle volumforståelse. Spesielt gjelder det oppgavetyper som er spesielle og uvante. Her må elevene ta i bruk løsningsstrategier som de er lite vant med å bruke.

Elevsvarene som jeg har vist, er fra egen skole, og vi ser at disse elevene har de samme problemene selv om de gjør det noe bedre. Elevene i de to klassene 1A og 1B har fulgt den nye læreplanen, L 97, i ungdomsskolen. Jeg tror ikke at dette har hatt noen innflytelse på resultatet, men heller at prøvesituasjonen har vært mer gunstig med færre oppgaver og bedre tid.
Det vil være interessant å følge med elever som etter hvert kommer inn i den videregående skole og som har fulgt L 97 i hele opplæringstiden. I dag går disse elevene i 6. klasse.

L 97 er en målstyrt læreplan, og svært detaljert både når det gjelder hva elevene skal lære og arbeidsmetodene det skal undervises etter. En legger stor vekt på rom, form og geometri, noe som burde hjelpe på volumforståelsen. Problemløsing som hovedmoment er borte, men å løse problemer er et gjennomgående uttrykk i L 97.

Referanser:

Ary, D., Jacobs, L .C., Razavieh, A. (1996): Introduction to Research in Education. USA: Harcourt Brace College Publisher

Breiteig, T. og Venheim, R. (1993): Matematikk for lærere, Bind 1 og 2. 2.utgave, Oslo: Tano A.S.

Bjørkqvist, Ole (1998) (red): Mathematics Teaching from a Constructivistic Point of View. Vasa: Åbo Akademi, Report no. 3.

Bjørkqvist, Ole og Finne, Lena (red.): Matematikk i Norden. Vasa: Åbo Akademi, Institusjonen for lærerutbildning. Rapport no. 8

Brekke, Gard (1995): Kartlegging av matematikkforståelse. Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.

Bruner, Jerome S.(1998): Uddannelseskulturen. København: Gyldendal, 1999 dansk udgave.

Carpenter, Thomas P.: Learning to Add and Subtract: An Exercise in Problem Solving. I Edward A. Silver (red) (1985) Teaching and Learning Mathematical Problem Solving. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Publ.

Dickson, L. et al (1984): Children learning mathematids. A Teachers guide to Recent research. London: Casell

Dubinsky, Ed.: ATheory and Practice of Learning College Mathematics. I Alan H. Schoenfeld (red) (1994). Mathematical Thinking and Problem Solving. Hillsdale, NJ: Erlbaum Ass. Publ

Emanuelsen, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red) (1991): Problemløsning. Lund: Studentlitteratur.

Gjone, Gunnar (1999): Pupils Alternative Conceptions in Mathematics: Oslo: Universitetet i Oslo

Gjone, Gunnar (1994): Matematikkundervisningen i etterkrigstidens enhetsskole - belysning av de kulturelle og demokratiske perspektiver: Oslo: Universitetet i Oslo

Grunnskolerådet: Avgangsprøve i grunnskolen 1987 – 1999, Matematikk

Grunnskolerådet: Veiledning til mønsterplan for grunnskolen 1987. *Veiledende årsplaner i matematikk* : Universitetsforlaget AS 1987.

Hovdenak, Sylvi Stenersen: 90-tallsreformene et instrumentalistisk mistak? Oslo: Gyldendal Akademisk, 2000.
Noter: Bearbeidet utgave av forfatterens avhandling (dr. polit.) – Universitetet i Tromsø, 1998, med tittel: Pedagogisk diskurs i 90-åras utdanningsreformer.

Illeris, Knud (1999): Læring – aktuel læringsteori i spændingsfeltet mellom Piaget, Freud og Marx. Fredriksberg: Roskilde Universitetsforlag.

Kilpatrick, Jeremy: A Retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. I Edward A. Silver (red) (1985*) Teaching and Learning Mathematical Problem Solving.Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum* Ass. Publ.

Kirfel, Christoph et al.(1998): Matematiske sammenhenger, Geometri, Landås, Caspar Forlag

Kirke og undervisningsdepartementet (1988). Mønsterplan for grunnskolen. Oslo: H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard) 2.opplag

Lester K. Frank, Jr.: Methodological Considerations In Research on Mathematical Problem-Solving Instruction. I Edward A. Silver (red) (1985) Teaching and Learning Mathematical Problem Solving.Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Publ.

Lie, Svein og Caspersen, Marion Lunde (1999): Innføring i SPSS
Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo

Mellin-Olsen, Stieg (1984): Eleven, matematikken og samfunnet : en undervisningslære. Bekkestua: NKI-forlaget

Nortvedt, Guri A. (1998): Hva kan teksten fortelle? Tekstskriving som diagnostisk redskap for å kartlegge sjette og niendeklassingers volumbegrep. Hovedfagsoppgave i realfagsdidaktikk. Universitet i Oslo.

Orton, Anthony (1992): Learning Mathematics: issues, theory and classroom practice. Second Edition. London: Cassell.

Polya, George (1954): Mathematicals and Plausible Reasoning.
Vol.1: Induction and Analogy in Mathematics
Vol. 2. Patterns of Plausible Inference
Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, Georg (1962): Mathematical Discovery Vol.1 & 2
New York: John Wiley & Sons.

Romberg, Thomas A.: Classroom Instruction That Fosters Mathematical Thinking and Problem solving: Connections Between Theory and Practice. I Alan H. Schoenfeld (red) (1994). Mathematical Thinking and Problem Solving. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Publ.

Schoenfeld, Alan H. (1992) Learning to think Mathematically. Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics, the University of California – Berkley

Schoenfeld, Alan H. (red) (1994): Mathematical Thinking and Problem Solving. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Publ.

Silver, Edward A. (red) (1985): Teaching and Learning Mathematical Problem Solving. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Publ.

Solvang, Ragnar (1992): Matematikk didaktikk. Bekkestua: NKI – forlaget.

Thompson, Patrick W.: Experience, Problem Solving, and Learning Mathematics. Considerations in Developing Mathematical Curricula. I Edward A. Silver (red) (1985) Teaching and Learning Mathematical Problem Solving. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Publ.

Westbye, Øivind (1989:) Min matematikk. Allmennbok, tilvalgsbok og oppgavesamling med repitisjon for 7. – 9. klasse, NKS – Forlaget

Øzerk, Kamil Z. (1999): Opplæringsteori og læreplansforståelse : en lærebok i pedagogikk. Vallset: Oplandske Bokforlag.

Vedlegg

Vedlegg 1: Måling og enheter. Diagnostiske oppgaver

Vedlegg 2: Forklaringer på svarene i oppgave 12a)

Vedlegg 3: Forklaringer på svarene i oppgave 11b)

Bokmål

Studieretning: .... (Modul: ....)

Kjønn (sett kryss) ☐ Jente ☐ Gutt

Fødselsdag: .... Fødselsmåned: .... Fødselsår: ....

Måling og enheter

Grunnkurs i videregående skole
Diagnostiske oppgaver

Utprøvingshefte
KIM-prosjektet

2000

Orientering til eleven.

Les oppgavene nøye før du svarer.

- Noen svar må du regne ut. Skriv svaret på den prikkede linja bak spørsmålet (......). Hvis du ønsker det, kan du kladde i margen.
- I noen av oppgavene skal du sette kryss i svarrutene (☐). Hvis du mener at flere svar er riktige, setter du flere kryss.
- Vi ber også om at du forklarer hvordan du tenker. Skriv slik at den som leser forklaringen, forstår hva du mener.
- Noen steder viser du svaret ved å tegne.

Læreren din får se gjennom oppgavene før han sender dem videre. Vi som retter oppgavene, får ikke vite navnet ditt.

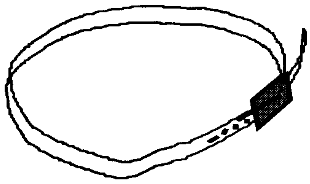
Hopp ikke over noen oppgaver selv om du er i tvil om hvordan du skal svare. Det er viktig at du svarer selv om du er usikker på svaret ditt.

Det er viktig at du ikke samarbeider med andre. Diskuter heller oppgavene når alle har levert inn heftene.

Det skal ikke brukes andre hjelpemidler enn linjal på denne prøven.

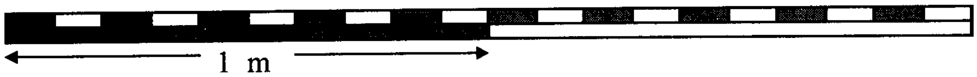
Lykke til!

Oppgave 1

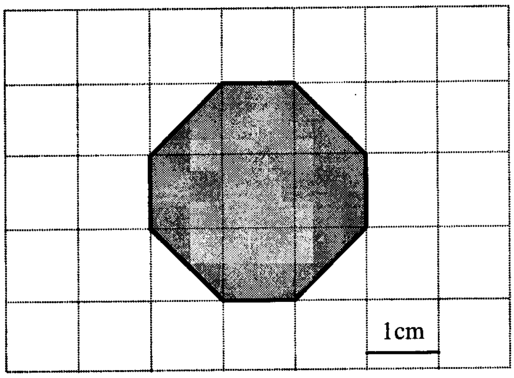


Beltet til Håvard er 1 m og 4 cm langt.

Tegn hvor langt det vil være, hvis vi strekker beltet ut langs linjalen under.



Oppgave 2

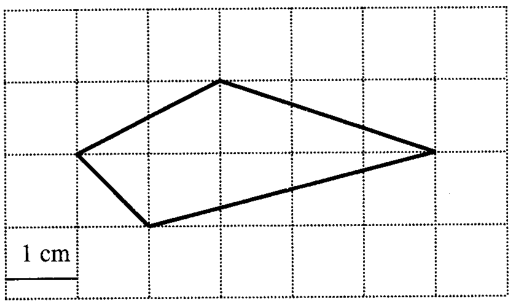


Lengden rundt kanten er:

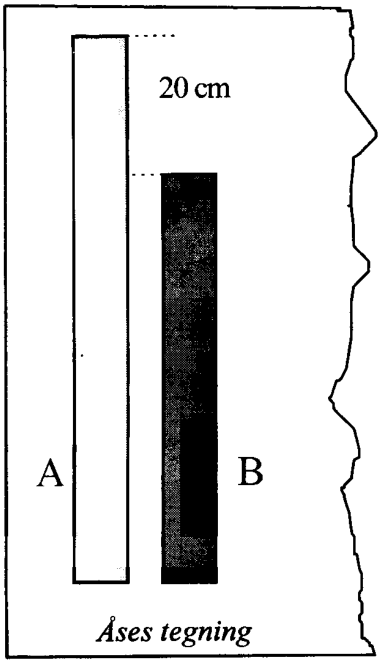
- ☐ 8 cm
- ☐ mer enn 8 cm
- ☐ mindre enn 8 cm
- ☐ Vi kan ikke avgjøre om det er slik

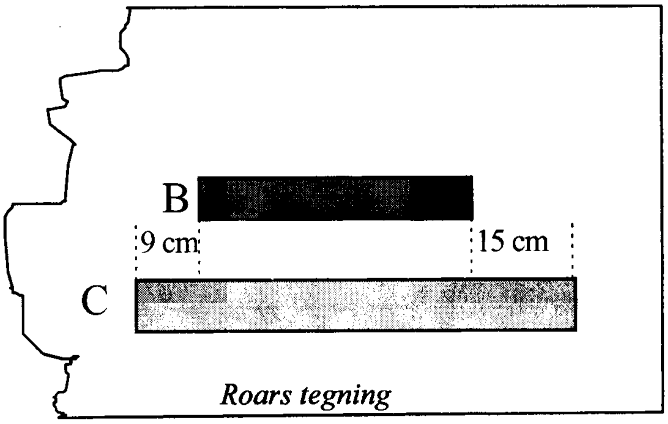
Oppgave 3

Hvor stort areal har figuren i rutenettet? …………………



Oppgave 4





Åse og Roar har tre bordbiter.
Åse legger to av bitene, A og B, ved siden av hverandre og lager en tegning.
Roar tegner bitene B og C.

Vi ser at B er kortere enn både A og C.
Hva kan du si om lengden av A og C?

- ☐ A og C er like lange
- ☐ A er lengre enn C
- ☐ C er lengre enn A.
- ☐ Det er ikke mulig å avgjøre hvilken som er lengst.

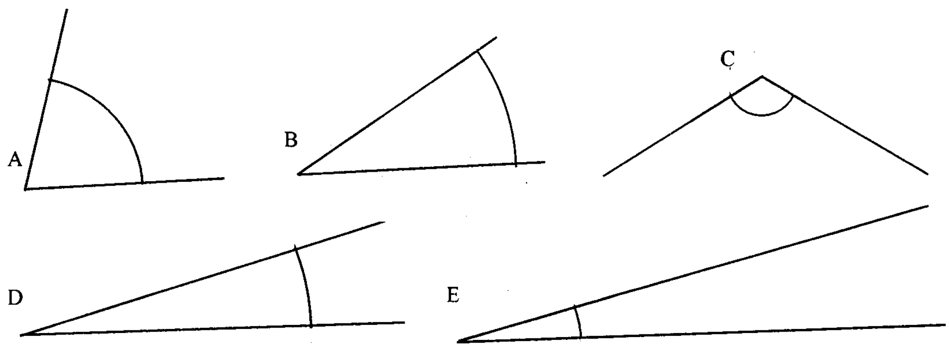
Forklar hvordan du tenkte:

Oppgave 5

Vinneren av et kappløp brukte tida 3 minutter og 47,5 sekunder.
Hvor langt tror du løpet var?

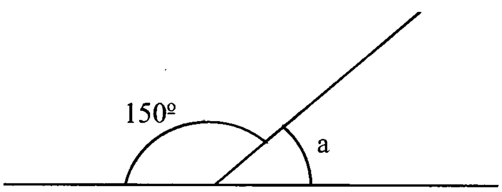
- ☐ 100 m
- ☐ 400 m
- ☐ 1 500 m
- ☐ 5 000 m
- ☐ 10 000 m

Oppgave 6



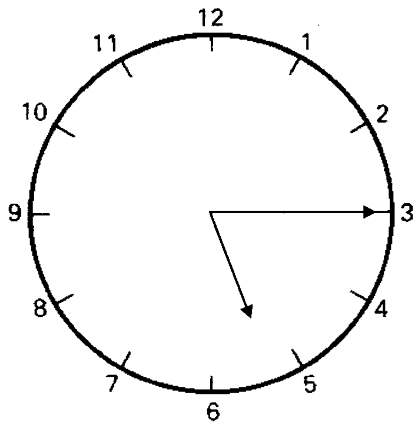
Hvilken av vinklene over er størst? ....

Oppgave 7



Hvor stor er vinkel a? ....

Oppgave 8



Klokka viser kvart over fem.

a. Hvor mange grader har den lange viseren dreiet siden klokka fem? ....

b. Hvor mange grader har den lille viseren dreiet siden klokka fire? ....

Forklar hvordan du tenkte for å komme frem til svaret i oppgave b:

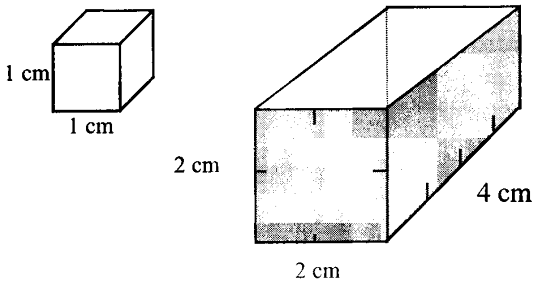
Oppgave 9

Tettheten til bly er større enn tettheten til mel.
Hva vil ha størst volum: 1 kg bly eller 1 kg mel?
Sett kryss:

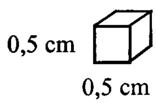
- ☐ 1 kg bly
- ☐ 1 kg mel
- ☐ De vil ha like stort volum
- ☐ Det er ikke mulig å avgjøre hva som har størst volum

Oppgave 10

a. Hvor mange av terningene til venstre vil få plass i den store esken? ....



b. Hvor mange av terningene til høyre vil få plass i den store esken?



Svar: ....

Oppgave 11

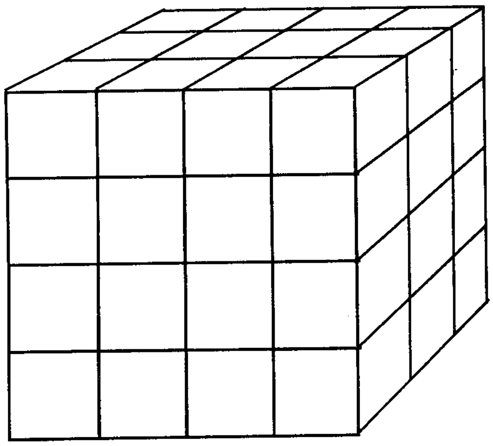
Vil det være plass til 4 personer i en kasse med volum 1 m^3?
Sett kryss:

☐ Ja
☐ Nei
☐ Usikker

b. Forklar hvorfor

Oppgave 12

Sigrid har bygget denne klossen av små terninger.
Hvor mange terninger har hun brukt? ....



b. Forklar hvordan du tenkte:

Oppgave 13

En brusflaske inneholder 0,5 l.
Hvor mye er det med andre måleenheter?
Sett kryss:

- ☐ 5 cm^3
- ☐ 50 cm^3
- ☐ 500 cm^3
- ☐ 0,5 dm^3
- ☐ 5 dm^3

)ppgave 14

. Hvor mange timer er det fra mandag morgen klokka åtte til tirsdag kveld klokka sju?

ivar:..........timer

i. Hvor mange minutter er det fra klokka 08.45 til klokka 14.10?

ivar:..........minutter

)ppgave 15

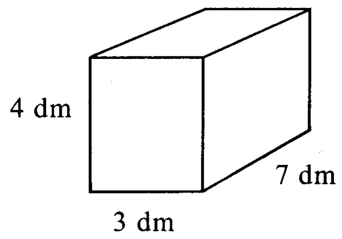
:ven sykler 5 kilometer.
Ivor lang tid tror du han bruker?
iett kryss:

- ☐ ca 5 min
- ☐ ca 20 min
- ☐ ca 1 time
- ☐ ca 2 timer

)ppgave 16

)lav arbeider på et lager som sender matvarer til butikker. Han skal pakke varer i kasser.
)e største kassene har et volum på 0,5 m^3.
'egn et forslag til hvordan kassen på 0,5 m^3 kan se ut. (Sett på mål.)

Oppgave 17



Guri vil dekke *hele boksen* med kvadratiske fliser. Flisene er på 1 dm^2.

Hvor mange fliser trenger hun? ....

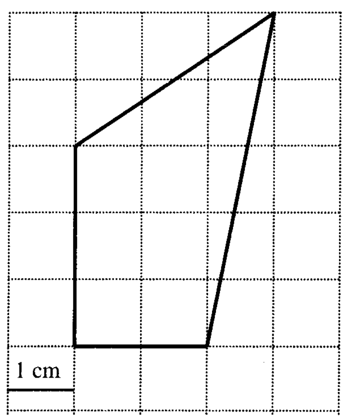
Oppgave 18

Omtrent hvor stort tror du volumet av kroppen til en voksen mann er?
Sett kryss:

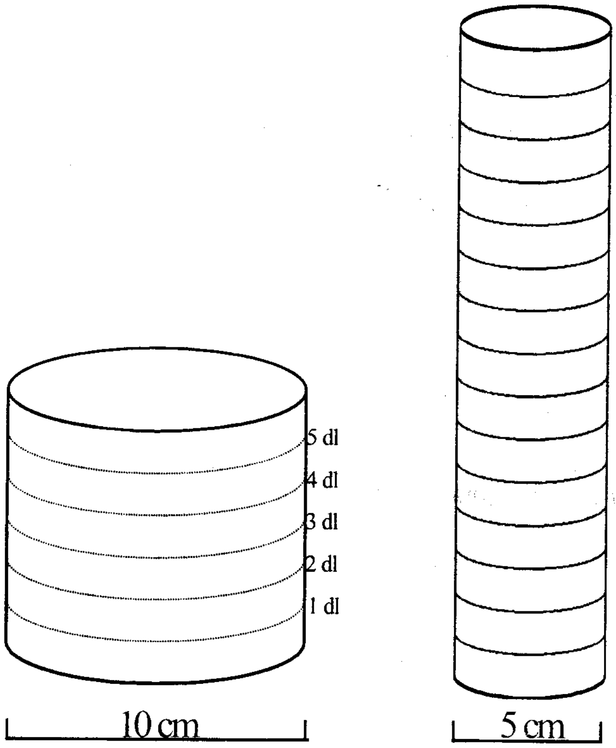
☐ 7 dm^3
☐ 70 dm^3
☐ 7 m^3
☐ 70 m^3

Oppgave 19

Hvor stort areal har figuren i rutenettet? ....



Oppgave 20



Over ser du to måleglass.

a. Merk av for 3 dl på det høye måleglasset.

Anne skal måle opp 3 dl vann så nøyaktig som mulig.

b. Hvilket måleglass bør hun bruke? ....

Forklar hvorfor hun bør bruke dette

Oppgave 21

a. Kryss av for de tingene på listen nedenfor som veier omtrent 0,5 kg?

☐ En halv liter melk
☐ En slalåmstøvel
☐ En liter maling
☐ En pakke med seks egg
☐ Et eple
☐ Et Donaldblad

b. Nevn en ting som veier omtrent:

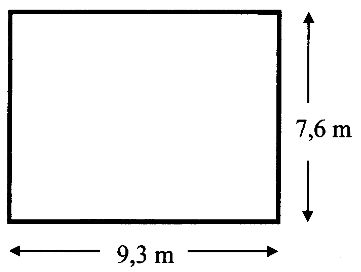
1 g: ....

100 g (1 hg): ....

10 kg: ....

Oppgave 22

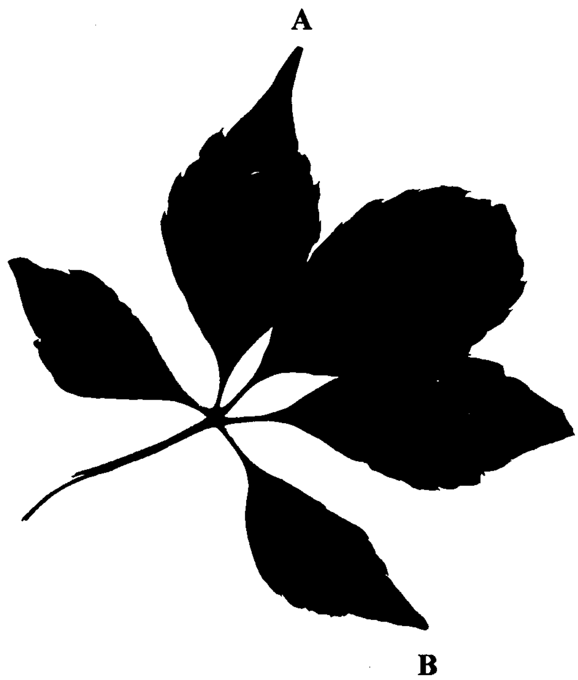
Per Olav vil vite arealet av et rektangelformet hus. Han måler lengden og bredden utvend



Per Olav er i tvil om hvordan han skal angi arealet. **Hjelp ham ved å sette kryss foran det beste forslaget.**

☐ 71 m^2
☐ 70,7 m^2
☐ 70,68 m^2

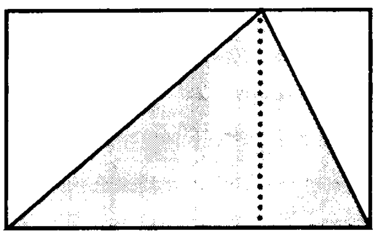
Oppgave 23
Figuren nedenfor viser en tegning av et blad. Målestokken til tegningen er 1 : 2.



Hvor langt er det mellom spissene som er markert med A og B på det virkelige bladet?

Svar: ....

Oppgave 24



Arealet av hele rektangelet er 20 cm^2.

Hvor stort er arealet av den grå delen? .... cm^2

Vedlegg 2

Forklaring på hvordan man kommer fram til antall terninger

Svarfordeling oppgave 12b	Frekvens	Prosent
Ubesvart	59	9,1
48 eller 64 "Formel-lik struktur" Utregnet med / uten forklaring	144	22,2
48/64 antall terninger i et lag, multiplisert med antall lag	233	35,8
48/64. Andre korrekte forklaringer på 48 terninger	33	5,1
40. Teller eller beregner synlige terningflater	5	0,8
80. Teller eller beregner synlige terningflater ganger to	29	4,5
30. Volumberegner terning/teller synlig terningflate som terning	7	1,1
60. Som 31, men multipliserer summen med to	1	0,2
Andre svar	139	21,4
Total	650	100

Vedlegg 3.

Forklaring til hvorfor / hvorfor ikke

Svarfordeling oppgave 11b	Frekvens	Prosent
Ubesvart	146	22,5
JA. oppdeling av volumet, menneskets størrelse i fth. kassen	15	2,3
JA. ”Det går om de ersmå”. ”Barn klarer det, ikke voksne” og lignende	28	4,3
JA. påstand om at det går	29	4,5
JA. Feilaktige forklaringer (f.eks feil i volumberegninger og lignende)	3	0,5
NEI. Påstander om at 4 personer er for store etc.	67	10,3
NEI. Eleven forsøker å resonnere / forklare hvorfor ikke	78	12,0
NEI. Påstander om at det er for lite plass – ikke begrunnet	75	11,5
Usikker. Spml. mht. hvor store menneskene er, kassens utforming.	84	12,9
Andre svar	125	19,2
Total	650	100